

¿CÓMO MEJORAR EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO PARA ENSEÑAR PROBABILIDAD?: ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS PARA UNA FORMACIÓN EFICAZ

HOW TO IMPROVE SPECIALIZED KNOWLEDGE FOR TEACHING PROBABILITY: METHODOLOGICAL STRATEGIES FOR EFFECTIVE TRAINING

 **Joan Franco Seguí, Ph.D.(c)**

Universidad de Girona
joanfrancosegui@gmail.com
Girona, España

 **Ángel Alsina, Ph.D.**

Universidad de Girona
angel.alsina@udg.edu
Girona, España

ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN

Recibido: 03/05/2024

Aceptado: 11/07/2024

Publicado: 30/09/2024

RESUMEN

A partir de una investigación previa en la que se ha diagnosticado el conocimiento especializado del profesorado de educación primaria para enseñar probabilidad desde el modelo *Mathematical Teacher's Specialized Knowledge* (MTSK), en este artículo se enlazan los resultados obtenidos con la práctica escolar. Desde esta perspectiva, para cada subdominio de conocimiento, primero se presenta una breve descripción y una síntesis de los principales resultados obtenidos en el estudio preliminar y, seguidamente, se ofrecen distintas estrategias metodológicas (lesson study, Flipped Classroom, reflexión sobre la práctica, entre otras) para mejorar la planificación e implementación de las tareas probabilísticas y llevar a cabo una enseñanza más eficaz. Se concluye que los procesos formativos a partir de estas estrategias pueden contribuir a mejorar el conocimiento especializado para enseñar probabilidad y, por consiguiente, promover el desarrollo profesional del profesorado de educación primaria.

Palabras clave: enseñanza de la probabilidad, conocimiento del profesorado de matemáticas, MTSK, estrategias metodológicas, educación primaria.

ABSTRACT

Based on previous research in which the specialized knowledge of primary school teachers to teach probability from the Mathematical Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) model has been diagnosed, this article links the results obtained with school practice. From this perspective, for each subdomain of

knowledge, we first present a brief description and a synthesis of the main results obtained in the preliminary study and then offer different methodological strategies (lesson study, Flipped Classroom, reflection on practice, among others) with the aim of improving the planning and implementation of probabilistic tasks and more effective teaching. It is concluded that training processes based on these strategies can contribute to improving the specialized knowledge for teaching probability and, consequently, promote the professional development of primary school teachers.

Keywords: Probability teaching, mathematics teacher knowledge, MTSK, methodological strategies, primary education.

INTRODUCCIÓN

Las investigaciones sobre el conocimiento del profesorado han experimentado un notable crecimiento desde los planteamientos de Shulman (1987), al surgir distintos modelos sobre el conocimiento del profesorado para la enseñanza de las matemáticas como, por ejemplo, el Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) de Ball et al. (2008), el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM) de Godino et al. (2017) o el Mathematical Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) de Carrillo et al. (2018), entre otros.

Este artículo se centra en el conocimiento del profesorado para la enseñanza de la probabilidad, ya que varios investigadores han subrayado la importancia de este tema y la escasa preparación del profesorado al respecto (Batanero, 2016). En este sentido, una revisión de la literatura científica realizada por Franco y Alsina (2022a) ha revelado las dificultades del profesorado de educación primaria para enseñar probabilidad. Estos hallazgos corroboran la necesidad de abordar esta problemática para fomentar la construcción significativa del conocimiento probabilístico en las aulas de educación primaria.

Desde este marco, este artículo parte de los resultados del estudio de Franco y Alsina (2024), en el que se han analizado los conocimientos del profesorado de educación primaria para enseñar probabilidad. Con esta finalidad, por un lado, los autores diseñaron el cuestionario MTSK-Estocástico/Probabilidad para analizar los conocimientos del profesorado desde los dominios y subdominios del modelo MTSK (Carrillo et al., 2018); y, por otro lado, consideraron los planteamientos teórico-metodológicos del Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas (EIEM) propuesto por Alsina (2018, 2019, 2020). Dicho enfoque sugiere secuencias de enseñanza intencionadas que contemplan tres niveles: informal (situaciones cotidianas y recursos manipulativos), intermedio (juegos, recursos tecnológicos) y formal (recursos gráficos y literarios), aspecto que ha sido considerado en los diversos ítems del cuestionario.

Con el propósito de establecer vínculos entre los resultados obtenidos en esta investigación con la mejora de la práctica escolar, el artículo se organiza en seis secciones correspondientes a cada subdominio del MTSK: en primer lugar, se ofrece una descripción concisa de cada subdominio y los principales resultados obtenidos en la investigación; en segundo lugar, se describen orientaciones didácticas con la ayuda de diversas estrategias metodológicas (e.g., lesson study, Flipped Classroom, reflexión sobre la práctica, diseño de tareas), con el propósito de mejorar los resultados obtenidos y, de este modo, mejorar el conocimiento especializado del profesorado de educación primaria que enseña probabilidad desde distintos contextos de enseñanza.

MATERIALES Y MÉTODOS

Conocimiento de los Temas (KoT)

Descripción del subdominio y principales resultados

El modelo MTSK considera el subdominio del Conocimiento de los Temas (KoT, por sus siglas en inglés) para describir el conocimiento de los distintos contenidos a enseñar. En este marco, establece cinco categorías para caracterizar el KoT: 1) Fenomenología: conjunto de situaciones donde se puede ubicar un tema y usos y aplicaciones dentro de las matemáticas de los conceptos, procesos y procedimientos (Liñán et al., 2016); 2) Propiedades y sus fundamentos: procesos matemáticos que enuncian (propiedades, teoremas...) como sus demostraciones y todo lo referente a la axiomática (Liñán et al., 2016); 3) Registros de representación: distintas formas en las que se puede representar un concepto, proceso o procedimiento (numérica, gráfica, verbal, ...) (Flores-Medrano et al., 2014); 4) Definiciones: distintas propiedades que hacen definible a un objeto (Flores-Medrano et al., 2014); y, 5) Procedimientos: cómo, cuándo y por qué se utilizan los distintos algoritmos (Liñán et al., 2016).

En Franco y Alsina (2022b) se caracterizó el conocimiento especializado para enseñar probabilidad, dando lugar al Conocimiento de los Temas Probabilísticos (CTP). En este sentido, los autores argumentan que, de modo general, el profesorado debe comprender los distintos significados de la probabilidad. De acuerdo con Batanero (2005), en el contexto de la matemática escolar existen el *significado intuitivo*, clásico, *frecuencial*, *subjetivo* y *axiomático*; si bien, en educación primaria, deben trabajarse todos los significados salvo el axiomático (Vásquez y Alsina, 2019a, 2019b)

En el estudio de Franco y Alsina (2024), como se ha indicado, se investigó el CTP a partir del cuestionario previamente validado MTSK-Estocástico/Probabilidad (Franco y Alsina, 2023), obteniendo unos resultados muy bajos al resolver problemas vinculados a la estimación de resultados, la aleatoriedad de sucesos y el cálculo de la probabilidad de un suceso. En concreto, se ha obtenido una puntuación de 44,8 sobre 100 de la puntuación media normada, concluyendo que los docentes en activo que han participado en

el estudio presentan dificultades para razonar e interpretar adecuadamente las situaciones planteadas. Además, no distinguen correctamente qué gráficos son los más adecuados según las distintas situaciones planteadas. Con relación a los contextos de aprendizaje propuestos por el EDEM en este subdominio de conocimiento el profesorado ha presentado mayores dificultades en los ítems relacionados con los recursos gráficos y los recursos tecnológicos.

Estrategias metodológicas

En el CTP se asume que el profesorado debería implementar estrategias y contextos de enseñanza más diversificados para que su alumnado progrese hacia un lenguaje matemático más avanzado que les permita interpretar los significados más técnicos de la probabilidad (Gómez, et al., 2013). En este sentido, las dificultades que enfrenta el profesorado en cuanto al dominio del CTP pueden provocar errores al enseñar probabilidad, dada su multiplicidad de significados.

Desde esta perspectiva, se propone diseñar programas de formación que promuevan el (CTP) a partir de la creación de entornos de aprendizaje, estrategia que se centra en desarrollar prácticas de instrucción para la clase de matemáticas a partir de juegos de rol, creación de cuentos, diseño de tareas matemáticas, etc., con la finalidad de enriquecer el proceso de enseñanza-aprendizaje y avanzar hacia la identificación de las cinco categorías que caracterizan el KoT en general (Fenomenología, propiedades y sus fundamentos, representación, definiciones y procedimientos) y el CTP en particular. Por ejemplo, Gyöngyösi-Wiersum et al. (2019), a partir de juegos de situación, muestran que un 59% de los participantes ha mejorado en el conocimiento matemático. Se destaca la importancia de encontrar un equilibrio entre repetición, memorización y métodos de enseñanza contemporáneos.

A continuación, a modo de ejemplo, se describe el diseño de tareas probabilísticas de los participantes como propuesta para mejorar el CTP en un hipotético programa de formación. En primer lugar, se incluye el enunciado propuesto por Godino y Batanero (2011):

Tabla 1.

Enunciado de una tarea probabilística (Godino y Batanero, 2011)

Raquel es una maestra de Primaria y lleva unos días trabajando algunas nociones de probabilidad en su clase de 6º. Sus alumnos asignan sin dificultad probabilidades a ciertos sucesos simples, como los resultados de lanzar un dado o una moneda o de girar una ruleta con todos los sectores iguales. Para hoy decide plantear la siguiente actividad:

Actividad 1. Suma de puntos al lanzar dos dados:

“Vamos a jugar con dos dados por parejas. Lanzamos los dados y sumamos los puntos obtenidos. Si resulta una suma de 6, 7, 8, ó 9 entonces gana A una ficha; si la suma es distinta de esos números gana B una ficha.

1. ¿Qué prefieres ser jugador A o B?

2. Juega con un compañero 10 veces y anota los resultados de las sumas que obtienes. ¿Quién ha ganado más veces A o B?

3. ¿Piensas que se repetirá el resultado si jugamos 100 veces más? ¿Por qué?

A continuación, se realizan buenas preguntas para que los participantes reflexionen sobre el planteamiento, resolución y discusión:

- ¿Es equitativo este juego? ¿Tiene ventaja un jugador sobre otro según estas reglas del juego? Determina la probabilidad teórica que tienen de ganar los jugadores A y B.
- Si realizáramos 100 tiradas, ¿con cuánta frecuencia se espera que gane A y B? Prepara una tabla de frecuencias relativas con los 100 datos experimentales obtenidos y un diagrama para ilustrar dichas frecuencias. ¿Quién ha ganado más veces A o B? Compara estos resultados con los resultados esperables teóricamente. ¿Qué ha ocurrido? ¿Por qué no ha ganado más veces el jugador A como era de esperar?
- ¿Qué puede hacer la maestra en esta situación para explicar el resultado a sus estudiantes?
- ¿Qué significados de la probabilidad se están abordando en la actividad propuesta?, ¿Por qué?

A partir de esta situación, se pregunta a los participantes que mejoren la tarea propuesta teniendo en cuenta las cinco categorías que caracterizan el KoT con la finalidad de aplicarlo en el aula.

Para terminar, para fomentar una mejora del recurso gráfico del EIEM, se pregunta:

- ¿Puede dar ejemplos de recursos gráficos que resulten útiles en la enseñanza de esta actividad?, ¿Cómo puede representar los datos?

ANÁLISIS DE RESULTADOS

Conocimiento de la estructura matemática (KSM)

Descripción del subdominio y principales resultados

Para comprender en mayor medida las matemáticas, el profesorado necesita distintas conexiones para desarrollar conceptos más avanzados y también para relacionarlos con los contenidos ya adquiridos. Desde esta perspectiva, el modelo MTSK distingue el Conocimiento de la Estructura Matemática (KSM), que considera que los conceptos matemáticos están vinculados entre sí, en otras palabras, están integrados en un sistema de conexiones (e.g., Aguilar et al., 2013; Liñán et al., 2014; Muñoz-Catalán et al., 2015), estas conexiones permiten relacionar tanto los elementos más avanzados (conexión de complejización) como los elementos más elementales (conexión de simplificación) Además, este subdominio considera las *Conexiones Transversales* entre contenidos, que se relacionan entre sí al tener cualidades comunes (Muñoz-

Catalán et al., 2015) y, las *Conexiones Auxiliares*, que sirven como medio para obtener resultados (Liñán et al., 2014).

En cuanto a la incorporación de este subdominio a la enseñanza de la probabilidad, que Franco y Alsina (2022b) denominan Conocimiento de la Estructura Probabilística (CEP), distintos autores sugieren cinco grandes focos para alcanzar una comprensión integral de la probabilidad en la etapa de educación primaria: 1) lenguaje verbal (expresiones verbales específicas, comunes y vinculadas a las matemáticas); 2) lenguaje numérico; 3) lenguaje tabular; 4) lenguaje gráfico; y, finalmente, 5) lenguaje simbólico (Gal, 2005; Gómez et al., 2014). En cuanto a la ocurrencia de los sucesos, Alsina (2019b) afirma que el profesorado debe cuantificar la posibilidad asociando la probabilidad a una medida, comenzando por la representación de la cuantificación de la posibilidad de ocurrencia a través de distintos sistemas.

El profesorado participante del Cuestionario MTSK-Estocástico/Probabilidad ha obtenido bajas puntuaciones (26,46 sobre 100 de puntuación media normada) en los ítems relacionados con el CEP, de lo que se desprende que el profesorado tiene muchas dificultades para relacionar las distintas conexiones conceptuales que se ponen en juego respecto a la comprensión de la aleatoriedad de sucesos. En consecuencia, el profesorado no se maneja correctamente para relacionar los conceptos más elementales con los conceptos más avanzados obteniendo resultados similares a la investigación de Burgess (2008) y, de esta forma, se pierden oportunidades para realizar una enseñanza eficaz y de calidad de los contenidos probabilísticos al no planificar y desarrollar una clase relacionando el nuevo contenido con los conocimientos previos del alumnado. Con relación a los contextos de enseñanza propuestos por el EIEM, el profesorado ha presentado más dificultades para activar conocimientos a partir de tareas que incluyen el uso de los recursos tecnológicos.

Estrategias metodológicas

De modo general, el KSM implica promover actividades con una variedad de conexiones matemáticas para garantizar la relación entre contenidos previos con los conceptos más avanzados, como se ha indicado. Ante los resultados obtenidos con relación al CEP, en esta sección se presentan distintas tareas para enseñar probabilidad, con el objetivo de fomentar la reflexión sobre la práctica docente y promover un debate posterior acerca del lenguaje utilizado por el profesorado durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de los contenidos probabilísticos. En concreto, esta estrategia metodológica asume que el profesorado debería conocer y tener criterio para saber cuándo, qué y por qué algo es conveniente y reflexionar sobre ello (Korthagen, 2001) con la finalidad de mejorar sus prácticas docentes, siendo fundamental la colaboración entre el profesorado (Zhang et al., 2021). En definitiva, ofrece la oportunidad de que el profesorado cuestione sus propias actividades y estrategias, identifique sus fortalezas y debilidades, con el objetivo de mejorar el CEP a partir de la reflexión conjunta.

Existen diferentes enfoques teóricos y metodológicos que permiten guiar el proceso de reflexión sobre la práctica docente en el ámbito educativo. Por un lado, el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (Godino et al., 2017) propone el constructo de criterios de idoneidad didáctica, desglosados en componentes e indicadores (Idoneidad Epistémica, Cognitiva, Interaccional, Mediacional, Emocional y Ecológica) para evaluar y mejorar la enseñanza de las matemáticas desde diversas dimensiones (Font et al., 2018). En otras palabras, los criterios, sus componentes e indicadores del constructo reflejan consensos sobre cómo debe ser una buena enseñanza en las matemáticas ampliamente asumidos en la comunidad de educadores (Breda et al., 2018). Por otro lado, el modelo realista-reflexivo en la formación de maestros enfatiza la importancia de deconstruir los Conocimientos Cotidianos que pueden ser obstáculos para una Identidad Profesional positiva, promoviendo procesos de co-construcción y reconstrucción de los Conocimientos Profesionales para capacitar al profesorado en el ejercicio efectivo de la profesión (Alsina, 2019b). Estos enfoques ofrecen herramientas valiosas para reflexionar sobre la práctica docente y mejorar la calidad educativa. Desde esta perspectiva, se proporciona la siguiente actividad para la mejora del CEP:

Figura 1.

¿Qué dice la prensa sobre el COVID-19?



Tabla 2.

Tarea probabilística propuesta por Alsina et al. (2020)

En primer lugar, se enseñan imágenes sobre la creencia que el COVID-19 afecta más a los hombres (Figura 1).

Ante estos datos, se proponen distintas preguntas para determinar la veracidad de estas afirmaciones:

- ¿Por qué se da esta tendencia?, ¿cuáles son las razones que hay detrás?
- ¿Existe en España diferencia de género en la probabilidad de seleccionar al azar a una persona con COVID-19?

- ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar al azar a un hombre entre los contagiados por COVID-19?

El alumnado deberá buscar información sobre casos por género y grupo de edad en España y calcular las respectivas probabilidades.

Por último, se pregunta al alumnado:

- ¿Cuál es la franja de edad en la que se presenta una mayor probabilidad de seleccionar al azar una persona infectada con el virus?
-

Desde esta perspectiva, el objetivo principal es la reflexión sobre la práctica docente del profesorado, focalizando las distintas conexiones matemáticas que se pueden realizar a partir de la actividad propuesta por Alsina et al. (2020). Por consiguiente, una vez analizada la actividad, se propone un debate a partir de las siguientes preguntas:

- ¿Cómo integraría la probabilidad con otras áreas de las matemáticas, como fracciones o proporciones en la actividad presentada?
- ¿Qué relación tiene los conceptos probabilísticos con la estadística?
- ¿Puede proporcionar ejemplos específicos de cómo los conceptos probabilísticos se relacionan con otras habilidades matemáticas fundamentales?
- ¿En qué consiste la incertidumbre?
- ¿Cómo utilizaría representaciones visuales, como diagramas de árbol o gráficos, para explicar conceptos probabilísticos?
- Además, para fomentar una mejora en el recurso tecnológico del EIEM, se pregunta:
- ¿Puede dar ejemplos específicos de recursos tecnológicos que considere útiles en la enseñanza de la probabilidad?

Adicionalmente, cabe destacar que el desarrollo de nociones probabilísticas a través de experimentos, exploraciones de datos y simulaciones puede ayudar a construir conexiones entre probabilidad y estadística (Sanchez y Chernoff, 2022).

Conocimiento de la enseñanza matemática (kmt)

Descripción del subdominio y principales resultados

El modelo MTSK incluye el subdominio Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT), que considera las distintas estrategias de enseñanza, recursos y materiales que el profesorado debe conocer (Liñán et al., 2014). Además, comprende todas las habilidades del profesorado (técnicas, tareas y ejemplos) para ayudar a construir conceptos matemáticos y superar los propios errores del alumnado (Montes et al., 2019).

Franco y Alsina (2022b) en su investigación adaptan el subdominio KMT a la enseñanza de la probabilidad, denominándolo Conocimiento de la Enseñanza de la Probabilidad (CENP). Según Batanero

y Godino (2002) para realizar una enseñanza efectiva de los contenidos probabilísticos, es necesario fomentar el desarrollo de las capacidades probabilísticas. Para lograrlo, el profesorado debe: 1) Proporcionar una amplia variedad de experiencias que permitan observar los fenómenos aleatorios y diferenciarlos de los deterministas; 2) Estimular la expresión de predicciones sobre el comportamiento de estos fenómenos y los resultados, así como su probabilidad; 3) Organizar la recogida de datos de experimentación de modo que el alumnado tenga posibilidad de contrastar sus predicciones con los resultados producidos y revisar sus creencias en función de los resultados; 4) Resaltar el carácter imprevisible de cada resultado aislado, así como la variabilidad de las pequeñas muestras, mediante la comparación de resultados de cada niño o por parejas; y, 5) Ayudar a apreciar el fenómeno de la convergencia mediante la acumulación de resultados de toda la clase y comparar la fiabilidad de pequeñas y grandes muestras.

Los resultados obtenidos a partir del Cuestionario MTSK-Estocástico/Probabilidad con relación a los ítems referidos al CENP evidencian un bajo conocimiento (42,8 sobre 100 de puntuación media normada), identificando obstáculos para desarrollar estrategias efectivas que ayuden al alumnado a superar las dificultades relacionadas con situaciones que dependen del azar (posible, imposible, seguro, probable). En este sentido, el profesorado carece de estrategias para dar respuesta al alumnado, hecho que puede deberse a las lagunas en el CTP, como se ha reflejado anteriormente. Otro dato del estudio ha revelado que, respecto a los distintos contextos de enseñanza, el profesorado moviliza mejor el CENP a partir de tareas usando recursos gráficos, superando con creces a los demás recursos.

Estrategias metodológicas

Desde una perspectiva general, distintos currículos de matemáticas (NCTM, 2000; MECD, 2014; Real Decreto 157/2022; entre otros) proponen una enseñanza activa y experimental de la probabilidad, apoyada en materiales manipulativos y representaciones relacionadas con contextos reales. Desde este marco y, ante la escasa puntuación del profesorado con relación al conocimiento de la enseñanza de la probabilidad, se propone una estrategia metodológica basada en la creación de entornos de aprendizaje, estrategia que se centra en desarrollar prácticas de instrucción para la clase de matemáticas. En este caso, se propone realizar un juego de rol con la finalidad de enriquecer el proceso de enseñanza-aprendizaje y avanzar hacia el desarrollo de las capacidades probabilísticas. Por ejemplo, García et al. (2020), concluyen que tanto el recurso de creación de entornos de aprendizaje como su desarrollo en un aula real son necesarios para la formación del profesorado, ya que permiten potenciar la creatividad y la motivación, así como aumentar la implicación del docente con la enseñanza de las matemáticas.

A continuación, a modo de ejemplo, se describe un juego de rol para simular la enseñanza de la probabilidad entre los distintos participantes en un hipotético programa de formación. En este caso, podría

ser necesario grabar el desarrollo de la actividad para un posterior análisis del participante con el rol de docente. La representación hipotética consiste en la simulación de una clase de los últimos niveles de educación primaria donde asisten los estudiantes y un docente que, a partir de una situación planteada, deberá enseñar los contenidos propuestos con el objetivo de fomentar el desarrollo de capacidades probabilísticas (Batanero y Godino, 2002). Teniendo en cuenta los colectivos implicados, se definen distintos roles que son asignados a distintos grupos de participantes, entre cuatro y cinco miembros. En este sentido, la clase contará con un estudiante con altas capacidades, dos con muchas dificultades, un estudiante con necesidades educativas especiales (NEE), tres con necesidades educativas de soporte educativo (NESE) y, trece que siguen el ritmo de la clase. Además, el profesorado que no participa del juego de rol será el encargado de observar el transcurso del juego y, por consiguiente, apuntar y analizar posibles mejoras en el proceso de enseñanza que, posteriormente, debatirán en grupo. El grupo formador plantea la siguiente actividad:

Tabla 3.

“Las Canicas Mágicas”

En su bolsa mágica, tiene 15 canicas numeradas del 1 al 15 (cada una con un número distinto).

El primer desafío consiste en que el alumnado elija una canica al azar de la bolsa mágica. ¿Cuál es la probabilidad de que alguien elija una canica con un número impar?

En el segundo desafío, el o la docente decide sacar 5 canicas al azar y enseñar sus números. Los números son: 2, 5, 8, 11 y 14. El alumnado debe calcular la probabilidad de que el próximo número sea múltiplo de 3.

A partir de este principio de actividad, por un lado, el grupo formador pide al participante con rol de docente que lleve a cabo la actividad durante el juego de rol. Por otro lado, a los participantes con rol de estudiante se les proporciona distintas preguntas que pueden ir haciendo durante el transcurso del juego, destacando que pueden añadir o quitar según vean conveniente. A modo de ejemplo, algunas preguntas pueden ser:

- ¿Cómo puedo calcular la probabilidad?
- ¿Qué es la probabilidad?
- ¿Qué es un número múltiplo de 3?

Al terminar la escenificación, es importante sintetizar y clarificar el registro de los observadores, las dudas que han registrado, los comentarios y/o aciertos que han percibido durante el transcurso del juego. En este sentido, se realizará un debate a partir de las notas de los observadores.

Conocimiento de la práctica matemática (KPM)

Descripción del subdominio y principales resultados

El Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM) considera las distintas formas de crear o producir matemáticas incorporando los aspectos de comunicación matemática, el razonamiento y la prueba ligados a un tema específico o general. En otras palabras, las diferentes formas de demostrar el significado de definición, axioma o teorema como elementos de la matemática (e.g., Aguilar et al., 2013; Carrillo et al., 2018; Liñán et al., 2014).

La adaptación de este subdominio a la enseñanza de la probabilidad Franco y Alsina (2022b), denominada Conocimiento de la Práctica Probabilística (CPP), considera las distintas formas de conocer, crear o producir probabilidad.

Desde este marco, algunos autores manifiestan la necesidad de usar contextos reales, significativos y motivadores para el alumnado (Alsina et al., 2020), ya que la probabilidad se relaciona con la capacidad para participar y gestionar adecuadamente las demandas del mundo real que implican incertidumbre y riesgo (Gal, 2012). Este autor propone tres cuestiones asociadas a esta visión de la probabilidad: 1) Involucrar, preparar al alumnado para implicarse en diferentes situaciones que presenten demandas probabilísticas; 2) Manejar, la mayoría de situaciones de aritmética no tienen soluciones que puedan definirse como correctas o incorrectas, en otras palabras, según las situaciones y sus metas personales o el contexto en el que se desarrolla la acción pueden decidir qué acción realizar; y, 3) Incertidumbre y riesgo, el grado experimentado puede ser la base de su percepción y capacidad para evaluar el riesgo asociado con eventos de relevancia para su vida.

En la investigación de (Franco y Alsina, 2024) se ha identificado un bajo conocimiento del profesorado (43,2 sobre 100 de puntuación media normada) sobre las distintas formas de proceder (pensamiento deductivo o inductivo) que se ponen en juego en situaciones basadas en estimaciones de situaciones sencillas donde intervenga el azar, observando y constatando la variedad de sucesos (posibles, imposibles, probables, etc.). Considerando que, para resolver un problema, el profesorado debe recurrir al conocimiento matemático (concretamente al KoT, KSM y KPM) para dar una solución adecuada desde el proceso de abstracción, que considera recursos, orientaciones, metas y tomas de decisiones (Schoenfeld, 2011), la baja puntuación obtenida en los distintos subdominios (CTP y CEP) se ve reflejado en el CPP, al no manejar correctamente las distintas situaciones propuestas.

Con relación al CPP que activa el profesorado en función de los distintos contextos del EIEM, el profesorado se desenvuelve mejor en los recursos gráficos y tecnológicos al obtener un mayor porcentaje de respuestas correctas en las actividades que utilizan dichos recursos.

Estrategias metodológicas

Teniendo en cuentas las bajas puntuaciones identificadas en relación con el CPP, se presenta una propuesta enmarcada dentro de la metodología de Lesson Study, al ser un método de trabajo colaborativo que relaciona la investigación y la docencia para fomentar el desarrollo profesional del profesorado (Murata, 2011). Esta metodología consiste en un ciclo de cuatro etapas (Murata, 2011; Perry y Lewis, 2009; Salinas et al., 2018): 1) Organización: Formular objetivos en colaboración; 2) Planeación: Se elabora una lección con la finalidad de lograr los objetivos; 3) Implementación: Cuando se pone en práctica la lección con la presencia de los demás participantes y toman nota; y, 4) Revisión: Comentar y discutir las observaciones con la finalidad de mejorar la lección.

Lewis (2009) afirma que el Lesson Study propicia el desarrollo del conocimiento del contenido y la didáctica asociada, la formación de comunidades de aprendizaje y el diseño de recursos para la enseñanza. Por consiguiente, se opta por utilizar esta metodología para mejorar el CPP. A continuación, a modo de ejemplo, se describe una propuesta de actividad focalizada en realizar conjeturas y estimaciones sobre un juego de una carrera de caballos y el correspondiente cálculo de probabilidades. En este sentido, se presenta a los participantes la Applet <https://www.proyectodescartes.org/descartescms/matematicas/item/1236-la-nocion-de-probabilidad-y-la-carrera-de-animales> con la finalidad que conjeturen, jueguen, observen cuál podría ser el ganador, etc.

Figura 2.

Juego carrera de caballos



Posteriormente, después de dejar un espacio para jugar y entender el funcionamiento del juego, se deja un tiempo para el diálogo entre iguales, a partir de equipos cooperativos. Para terminar, se pide que cada docente participante del Lesson Study elabore una situación de aprendizaje con el objetivo de implementarla en el aula. Para dar respuesta a esta demanda, los participantes deben considerar distintas estrategias para solucionar los posibles problemas del alumnado. Una vez diseñada e implementada la situación de aprendizaje, los participantes deben analizar y evaluar la práctica docente.

Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM)

Descripción del subdominio y principales resultados

El subdominio Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM) incluye las características de aprendizaje inherentes y al conocimiento de las teorías de aprendizaje de las matemáticas adquiridas a lo largo de su experiencia profesional (Escudero y Carrillo, 2014). En este sentido, se considera fundamental comprender cómo aprende el alumnado los contenidos matemáticos considerando los errores, dificultades u obstáculos que puedan tener en el proceso de enseñanza-aprendizaje (e.g., Carrillo et al., 2018; Escudero y Carrillo, 2014; Liñán et al., 2014; Sosa et al., 2013). Asimismo, es relevante analizar los componentes de la Idoneidad Epistémica propuestos por el EOS de Godino et al. (2007) tales como los errores, las ambigüedades, la riqueza de los procesos y, finalmente, la representatividad de la complejidad. La consideración de estos componentes permite una reflexión más profunda sobre cómo los estudiantes construyen su conocimiento matemático, identificando posibles obstáculos y diseñando estrategias efectivas para superarlos.

Considerando el marco del MTSK, (Franco y Alsina, 2022b) proponen el Conocimiento de las Características de Aprendizaje de la Probabilidad (CCAP), señalando que el profesorado debe ser consciente de los distintos errores del alumnado para ser guía en su aprendizaje. En este sentido, González et al. (2017) afirman que al observar e interpretar las estrategias utilizadas por el alumnado para resolver problemas probabilísticos, el profesorado puede avanzar en el desarrollo de estrategias mejoradas y la prevención de dificultades de aprendizaje.

Con base en estos fundamentos, por un lado, (Franco y Alsina, 2024) en su investigación han revelado un CCAP muy deficiente del profesorado de primaria (12 sobre 100 de puntuación media normada) para identificar las posibles dificultades y errores que presenta el alumnado al hacer estimaciones sobre sucesos probables e improbables, por ejemplo, en el lanzamiento de dados; por otro lado, respecto al CCAP que ponen en juego en los contextos de enseñanza del EIEM, el profesorado se desenvuelve algo mejor en los contextos reales, los recursos manipulativos y recursos gráficos, pero hay mucho margen de mejora en los distintos contextos de enseñanza.

Estrategias metodológicas

El profesorado debería ser plenamente consciente de cómo el alumnado piensa y construye conocimientos al abordar actividades y tareas (Sosa et al., 2016), teniendo en cuenta cuatro cuestiones: 1) las teorías de aprendizaje asociadas a un contenido matemático, incorporando el conocimiento de las teorías y estructuras de desarrollo cognitivo (Escudero-Ávila et al., 2015); 2) las fortalezas y dificultades asociadas a un contenido matemático (Sosa et al., 2013); 3) las formas de interacción del alumnado con un contenido matemático (Carrillo et al., 2018); y, 4) los principales intereses y expectativas del alumnado (Sosa et al.,

2013). En este sentido, el profesorado tiene un papel fundamental para promover que el alumnado aprenda a utilizar de forma comprensiva y eficaz los distintos conocimientos que les sirvan de base para la toma de decisiones en situaciones en las que la incertidumbre es relevante (Alsina et al., 2020). Así, la calidad de la enseñanza depende del conocimiento especializado del profesorado y su preparación para enseñar, ya que afecta al aprendizaje y desarrollo de competencias matemáticas del alumnado (Darling-Hammond et al., 2009).

Para avanzar en esta dirección, se propone utilizar el Flipped Classroom en una situación de aprendizaje que se relacione con la probabilidad, al ser una metodología que da prioridad al autoaprendizaje a través de material didáctico que proporciona el profesorado y así aprovechar el tiempo de clase para resolver dudas y poner en práctica la teoría que previamente se ha trabajado (Andía-Celaya et al., 2020). En otras palabras, las tareas o proyectos se llevan a cabo en el aula y los contenidos son aprendidos fuera de ella. García y Cremades (2019) afirman que la metodología Flipped Classroom aporta los siguientes beneficios: uso eficiente del tiempo en la clase presencial; aprender activamente como oportunidad de aprendizaje; mayor interacción profesorado-alumnado; distintos estilos de aprendizaje; y desarrollo del aprendizaje de forma autónoma. En definitiva, este enfoque permite que el alumnado adquiera conocimientos básicos antes de la clase, lo que les permite participar activamente en discusiones y actividades prácticas durante el tiempo de clase. Además, facilita un aprendizaje más personalizado, ya que pueden revisar los recursos según sus propios ritmos y necesidades.

A continuación, pues, se propone la enseñanza de contenidos de probabilidad a partir de la experiencia de clase invertida propuesta por Román-Traverso (2017).

En primer lugar, es necesario considerar qué saberes o contenidos se trabajarán; en este caso, se realizará a partir del reconocimiento de experimentos aleatorios y el desarrollo de la comprensión de resultados posibles en un experimento aleatorio. En este sentido, días antes de la primera clase presencial, el profesorado presenta un vídeo con sus objetivos y conceptos nuevos, terminando con un resumen y unas preguntas relacionadas con el tema tratado. Seguidamente, en la clase presencial, los participantes deben entregar las respuestas que cuentan como puntos extra en el curso, dando un incentivo para ver el vídeo. Para ello, se realizan preguntas generales para saber qué conocimientos tiene el alumnado sobre los contenidos a trabajar. Además, se propone un trabajo en grupos cooperativos con el objetivo de analizar los resultados posibles en distintos experimentos aleatorios (según las motivaciones y gustos del alumnado, se propone unos experimentos u otros). Esta actividad tiene como finalidad aprender los conceptos y contenidos probabilísticos de forma práctica.

Una vez elegido el tema, el alumnado debe realizar los experimentos en casa, de forma conjunta y consensuada con los integrantes del grupo y grabarlo para, en la posterior sesión, poner en común sus datos y predicciones.

Como trabajo individual, se proporcionan algunos vídeos teóricos sobre el aprendizaje de la probabilidad con el objetivo de dar herramientas y estrategias al alumnado para desarrollar la comprensión de resultados posibles. Una vez en el aula, el tienen la posibilidad de preguntar dudas sobre conceptos y contenidos probabilísticos que no entiendan. De este modo, el alumnado se convierte en el foco del proceso de enseñanza-aprendizaje, mientras que el profesorado debe actuar como guía, observando los errores, dificultades u obstáculos que puedan tener y, por consiguiente, considerar distintas estrategias para solucionar las posibles dificultades.

Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS)

Descripción del subdominio y principales resultados

El Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS), además del conocimiento del currículo de matemáticas, incluye el conocimiento respecto al aprendizaje que se espera en cada etapa, por ejemplo, teniendo en cuenta las orientaciones del NCTM (e.g., Carrillo et al., 2018; Liñán et al., 2014; Muñoz-Catalán et al., 2015, entre otros). Se trata, pues, de establecer qué conocimientos puede alcanzar el alumnado en cada etapa (Aguilar et al., 2013).

Desde esta perspectiva, (Franco y Alsina, 2022b) caracterizan el Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de la Probabilidad (CEAP). Para concretar los contenidos probabilísticos que se requieren enseñar en un curso determinado, Vásquez y Alsina (2014) indican algunos aspectos esenciales que deben considerarse en la enseñanza de dichos contenidos en la etapa de educación primaria: 1) Recoge y clasifica datos cualitativos y cuantitativos; 2) Realiza e interpreta gráficos muy sencillos; 3) Identifica situaciones de carácter aleatorio; 3) Realiza conjeturas y estimaciones sobre algunos juegos; 5) Resuelve problemas que impliquen dominio de los contenidos propios de la probabilidad; 6) Reflexiona sobre el proceso de resolución de problemas.

En la investigación de (Franco y Alsina, 2024), los datos han revelado que el profesorado de primaria tiene muchas dificultades en la comprensión del currículo escolar (20,53 sobre 100 de puntuación media normada). En concreto, cometen errores en la identificación de conceptos y contenidos más avanzados que se relacionan con el contenido involucrado en la resolución del problema planteado. Además, la mayoría del profesorado muestra poco rigor en sus respuestas, generalizando los contenidos en grandes bloques, por ejemplo, la probabilidad, sin dar una respuesta concreta de los contenidos probabilísticos relacionados con

la problemática. Además, tienen dificultades para concretar qué contenidos se deberían enseñar en un curso determinado.

En relación con los contextos de enseñanza propuestos por el EIEM, los resultados han evidenciado que presentan más dificultades con los recursos tecnológicos. Asimismo, hace falta reforzar el trabajo con los demás contextos, para ofrecer al alumnado una mayor variedad de recursos para aprender.

Estrategias metodológicas

Considerando los resultados del CEAP, se presenta una propuesta de mejora de este conocimiento a partir de la reflexión sobre la práctica, pues distintas investigaciones han evidenciado su eficacia (e.g., Akkus y Karakava, 2020; Broitman et al., 2023; Burgos et al., 2020; Coles, 2019; Mabova et al., 2022; Pepin et al., 2017; Pourdavood et al., 2021; entre otros).

A modo de ejemplo, se describe una actividad que se puede realizar en el ciclo superior de educación primaria (10-12 años) para la enseñanza de contenidos probabilísticos (frecuencia relativa, eventos equiprobables, análisis de datos, entre otros) con el objetivo de comprender los conceptos básicos de la probabilidad a través del lanzamiento de un dado. Para el desarrollo de la actividad, se recomienda organizar la clase en grupos de cuatro o cinco y repartir dos dados por grupo. Cada componente del grupo lanza el dado 20 veces y registra los resultados de cada lanzamiento en una tabla (tabla 3). Se reparte un dado, una pizarra pequeña y rotuladores. Cada componente del grupo realiza 10 lanzamientos y va anotando el resultado:

Tabla 4.
Ejemplo de tabla para anotar los resultados

Valor (lanzamiento)	Número par / Número impar	Número obtenido
1	Par	6
2	Par	2
3	Impar	5
4	Impar	3
5	Impar	1
6	Impar	5
...		

Después de lanzar el dado, cada estudiante individualmente debe responder a las siguientes preguntas:

- ¿Cuántas veces obtuviste un número par?
- ¿Cuántas veces obtuviste un número impar?
- ¿Cuál fue el número que más veces salió?
- ¿Cuál fue el número que menos veces salió?

A continuación, es necesario que el alumnado de cada grupo comparta y compare sus resultados para discutir las diferencias y similitudes entre los distintos resultados. Posteriormente, se les pide que anoten en otra tabla todos los resultados (de cada participante del grupo, para formar una tabla con 100 lanzamientos o más) y se les pregunta:

- ¿Creéis que saldrán las mismas respuestas que os han salido antes?, ¿Por qué?

Además, pueden añadirse distintas preguntas, por ejemplo, que calculen el porcentaje de veces que salió cada número. Finalmente, es importante terminar la actividad reflexionando sobre lo aprendido. Por ejemplo, se les puede preguntar:

- ¿Fue justo el juego?
- ¿Cómo sería un juego justo en términos de probabilidad?
- ¿Por qué algunos números salieron más veces que otros?
- ¿Sí cambiamos el diseño del dado o, por el contrario, añadimos otro dado, cambiará el resultado?
- Si un dado tiene números repetidos, ¿cómo afecta a la probabilidad?

A través de este tipo de preguntas se busca promover el diálogo y, de esta forma, construir el concepto de probabilidad de manera conjunta.

Para conocer el conocimiento de los estándares de aprendizaje del profesorado, con base a la actividad propuesta, se propone debatir con el profesorado sobre las siguientes preguntas con la finalidad de profundizar en el conocimiento de los estándares de aprendizaje de la probabilidad:

- ¿Qué conceptos y/o propiedades probabilísticas deben usar los alumnos para dar una solución correcta a este problema?
- ¿Qué intervenciones realizaría como docente para superar las dificultades del alumnado?
- ¿Con qué contenidos estadísticos probabilísticos relacionar el contenido involucrado en este problema?
- A partir de la actividad anterior, ¿Cómo puede el profesorado evaluar el progreso del alumnado con relación a los estándares de aprendizaje?
- ¿Qué contenidos considera como mínimos para que el alumnado sea competente en probabilidad?
- ¿La actividad propuesta está acorde con el nivel de escolaridad del alumnado?

- ¿Cómo adaptaría esta actividad para atender a estudiantes con diversos niveles de habilidades en matemáticas?
- ¿Qué modificaciones haría para desafiar a estudiantes más avanzados o, para proporcionar ayuda al alumnado con dificultades de aprendizaje?

CONCLUSIONES

En este artículo se ha presentado propuesta a través de distintas estrategias metodológicas (e.g., *Lesson Study*, *Flipped Classroom*, reflexión sobre la práctica, diseño de tareas) con el propósito de mejorar el conocimiento especializado del profesorado de primaria para enseñar probabilidad, considerando los débiles resultados de un estudio preliminar (Franco y Alsina, 2024). Como se ha señalado a lo largo del artículo, los datos obtenidos han revelado dificultades significativas en los distintos subdominios del MTSK (Carrillo et al., 2017). Asimismo, se han identificado obstáculos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la probabilidad en los distintos contextos propuestos por el EIEM (Alsina, 2018, 2019a, 2020) que abarcan contextos reales, recursos manipulativos, juegos, recursos tecnológicos y materiales gráficos.

Con el fin de apoyar a los docentes de educación primaria en la elaboración e implementación de tareas probabilísticas fundamentadas en los distintos subdominios del MTSK y contextos del EIEM, se han propuesto estrategias metodológicas específicas para cada uno de los subdominios analizados.

Con relación al CTP, el profesorado debe conocer los saberes de probabilidad que enseña al alumnado. En este contexto, el MTSK categoriza el conocimiento de los temas en cinco dimensiones: fenomenología, propiedades, fundamentos, registros de representación, definiciones y procedimientos). En otras palabras, se focaliza en los aspectos fenomenológicos, significados y definiciones de conceptos, que caracterizan aspectos concretos, en este caso, de la probabilidad (Franco y Alsina, 2022b). En este sentido, es necesario que en primaria se trabajen los distintos significados de probabilidad propuestos por Batanero (2005), salvo el axiomático (Vásquez y Alsina, 2019a, 2019b). Bajo esta premisa, a partir de la estrategia metodológica de creación de entornos de aprendizaje, se ha presentado un ejemplo de actividad para enseñar probabilidad, junto con buenas preguntas para que los participantes entren en un debate sobre el planteamiento, resolución y discusión de la actividad.

Respecto al subdominio del CEP, es necesario que el profesorado realice distintas conexiones desde los conocimientos previos para desarrollar conceptos más avanzados. En este sentido, de modo general, el modelo MTSK describe este subdominio como un sistema de conexiones entre los distintos conceptos matemáticos (Aguilar et al., 2013; Liñán et al., 2014; Muñoz-Catalán, 2015, entre otros). Para mejorar este conocimiento, con base en la estrategia metodológica de reflexión sobre la práctica, se ha descrito una tarea probabilística realizada por Alsina et al. (2020) con la finalidad de reflexionar a partir de buenas preguntas sobre las distintas conexiones matemáticas que se pueden realizar desde la actividad propuesta.

El KMT propuesto por el MTSK, como se ha señalado, considera las distintas estrategias de enseñanza, recursos y materiales que el profesorado debe conocer (Liñán et al., 2014) para realizar una enseñanza eficaz de las matemáticas. Considerando su adaptación a la enseñanza de la probabilidad, se ha seleccionado la estrategia metodológica basada en la creación de entornos de aprendizaje para presentar un juego de rol para mejorar el CENP. A través de los distintos roles asignados a cada participante en un ficticio programa de formación, se ha impulsado fomentar la reflexión sobre las mejoras en el proceso de enseñanza de los distintos contenidos probabilísticos.

En relación con el KPM, Graus (2022) afirma que para hacer matemáticas se necesita interpretar situaciones matemáticas, utilizar un lenguaje especializado, realizar construcciones que permitan predicciones útiles, etc. Así, el MTSK considera las distintas formas de crear o producir matemáticas (Carrillo et al., 2018). Para impulsar este conocimiento, desde la metodología *Lesson Study* se ha propuesto una actividad para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de conjeturas y estimaciones sobre una carrera de caballos y el cálculo de probabilidades. La finalidad de la actividad es analizar y evaluar la práctica docente a partir de las distintas formas que considere el profesorado para enseñar los contenidos probabilísticos, pues permiten fomentar el desarrollo de las capacidades matemáticas (Liñán et al., 2014); en otras palabras, las distintas estrategias ayudan en el proceso de enseñanza-aprendizaje para dar soluciones a los posibles problemas del alumnado o aumentar la dificultad de aquellos estudiantes más avanzados a partir de la formación de comunidades de aprendizaje (Lewis, 2009).

Respecto al KFLM, Escudero y Carrillo (2014) indican que integra las características de aprendizaje intrínsecas y el conocimiento de las teorías de aprendizaje de las matemáticas, junto con cómo aprende el alumnado teniendo en cuenta sus errores, dificultades u obstáculos en el proceso de aprendizaje. Para fomentar este conocimiento para el caso específico de la enseñanza de la probabilidad en primaria, se ha propuesto la metodología *Flipped Classroom*, ya que aporta distintos beneficios como, por ejemplo, aprender activamente, distintos estilos de aprendizaje, desarrollo del aprendizaje de forma autónoma, entre otras (García y Cremades, 2019).

Finalmente, con relación al KMLS, el MTSK señala que el profesorado debe saber qué conocimientos puede alcanzar el alumnado en cada etapa (Aguilar et al., 2013). Desde esta perspectiva, se han indicado algunas recomendaciones de distintos organismos, como por ejemplo el NCTM (2000) o las propuestas de distribución de contenidos por niveles de Vásquez y Alsina (2014). Adicionalmente, para mejorar el CEAP, se ha descrito una actividad con base en la reflexión sobre la práctica, para la enseñanza de contenidos probabilísticos, por ejemplo, la equiprobabilidad de sucesos.

En conclusión, se han proporcionado una amplia variedad de estrategias metodológicas vinculadas a cada subdominio de conocimiento del MTSK con el objetivo de mejorar el conocimiento especializado del profesorado de primaria sobre la enseñanza de la probabilidad. En concreto, se han considerado estrategias como *Flipped Classroom*, *Lesson Study*, la reflexión sobre la práctica, entre otras, para mejorar la enseñanza de la probabilidad, teniendo en cuenta los débiles conocimientos que revelan los resultados de la investigación en este campo. En su conjunto, estas estrategias determinan una hoja de ruta que contribuye al desarrollo profesional docente del profesorado con el objetivo de adquirir conocimientos matemáticos y didácticos esenciales para desarrollar tareas que fomenten la alfabetización probabilística del alumnado de educación primaria.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aguilar, Á., Carreño, E., Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., Escudero, D., Flores, E., Flores, P., Montes, M. y Rojas, N. (2013). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas: MTSK. En CIBEM, *Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*.
- Akkuş, R. y Karakaya, M. (2020). The effects of the professional development program supported by on-the-job visits on the pedagogies of mathematics teachers. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 15(3), em0608. <https://doi.org/10.29333/iejme/8481>
- Alsina, Á. (2018). Seis lecciones de educación matemática en tiempos de cambio. Itinerarios didácticos para aprender más y mejor. *Padres y Maestros*, 376, 13-20. <https://doi.org/10.14422/pym.i376.y2018.002>
- Alsina, Á. (2019a). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (6-12 años)*. Graó.
- Alsina, Á. (2019b). Hacia una formación transformadora de futuros maestros de matemáticas: avances de investigación desde el modelo realista-reflexivo. *Uni-pluriversidad*, 19(2), 60-79. <https://doi.org/10.17533/udea.unipluri.19.2.05>
- Alsina, Á. (2020). Enseñar estadística en Educación Primaria: primeras recomendaciones desde el Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas En C. Ribeiro y A. Pavan (Eds.). *Investigações hispanobrasileiras em Educação Estatística*, 107-112. Taubaté: Editora Akademy (ISBN 978-65-990615-4-7)
- Alsina, Á., Vásquez, C., Muñoz-Rodríguez, L. y Rodríguez Muñoz, L. J. (2020). ¿Cómo promover la alfabetización estadística y probabilística en contexto? Estrategias y recursos a partir de la COVID-19 para Educación Primaria. *Épsilon*, 104, 99-128.

- Andía-Celaya, L.A., Santiago-Campión, R. y Sota-Eguizábal, J. M. (2020). ¿Estamos técnicamente preparados para el flipped classroom? un análisis de las competencias digitales de los profesores en España. *Contextos Educativos*, 25, 275-311. <http://doi.org/10.18172/con.4218>
- Ball, D., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *RELIME*, 8(3), 247-264.
- Batanero, C. (2016). Posibilidades y retos de la enseñanza de la probabilidad en la educación primaria. En SEMUR, Sociedad de Educación Matemática Uruguaya (Ed.), *Actas del 6º Congreso Uruguayo de Educación Matemática*, (pp. 24-31). Sociedad de Educación Matemática Uruguaya.
- Batanero, C. y Godino, J. D. (2002). *Estocástica y su didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/6_Estocastica.pdf
- Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. (2018). Criterios Valorativos y normativos en la didáctica de las matemáticas: El caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema*, 32(60), 255–278. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13>
- Broitman, C., Cobeñas, P., Escobar, M., Grimaldi, V. y Sancha, I. E. (2023). A Study on Mathematics Teaching to Students with Disability in Schools of the Province of Buenos Aires. *Revista Colombiana de Educación*, 87, 278-306. <https://doi.org/10.17227/rce.num86-12080>
- Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2020). La cuestión de la idoneidad de los vídeos educativos de matemáticas. *Revista Española de Pedagogía*, 78(275), 27-50. <https://doi.org/10.22550/REP78-1-2020-07>
- Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores, E., Escudero, D. y Muñoz-Catalán, Mª. C. (2018). The mathematics teacher's specialized knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20, 236–253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Coles, A. (2019). Facilitating the use of video with teachers of mathematics: learning from staying with the detail. *International Journal of STEM Education*, 6(5), 1-13. <https://doi.org/10.1186/s40594-018-0155-y>
- Darling-Hammond, L. y Richardson, N., (2009). Teacher learning: what matters? *Educational leadership*, 66(5), 46-53.

- Escudero, D. y Carrillo, J. (2014). Knowledge of Features of Learning Mathematics as part of MTSK. *En Proceedings PME*, 306. PME
- Escudero, D., Carrillo, J., Flores-Medrano, E., Climent, N., Contreras, L. y Montes, M. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. *PNA*, 10(1), 53-77 <https://doi.org/10.30827/pna.v10i1.6095>
- Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M., Aguilar, A. y Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. En J. Carrillo, L.C. Contreras, N. Climent, D. Escudero-Ávila, E. Flores-Medrano y M.A. Montes (Eds.), *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (pp. 57-72). Universidad de Huelva.
- Font, V., Breda, A., Seckel, M. J., & Fan, L. R. P. (2018). Análisis de las reflexiones y valoraciones de una futura profesora de matemáticas sobre la práctica docente. *Revista de Ciencia y Tecnología*, 34(2), 62-75.
- Franco, J. y Alsina, Á. (2022a). El conocimiento del profesorado de Educación Primaria para enseñar estadística y probabilidad: una revisión sistemática. *Aula Abierta*, 51(1), 7-16. <https://doi.org/10.17811/rifie.51>
- Franco, J. y Alsina, Á. (2022b). Conocimientos del profesorado para enseñar estadística y probabilidad. *Educación Matemática*, 34(3), 65-96.
- Franco, J. y Alsina, Á. (2023). Evaluando el conocimiento especializado para enseñar estadística y probabilidad: Elaboración y validación del Cuestionario MTSK-estocástico. *Uniciencia*, 37(1), 1-22. <https://doi.org/10.15359/ru.37-1.5>
- Franco, J., y Alsina, Á. (2024). *Specialized Knowledge of in-Service primary education teachers to teach probability: Implications for continuous education*. Manuscrito enviado para publicación.
- Graus, M. (2022). La enseñanza de las matemáticas y el desarrollo del pensamiento en la Educación Básica. *Dilemas Contemporáneos: Educación, Política y Valores*, 1-26. <https://doi.org/10.46377/dilemas.v9i2.3038>
- Gal, I. (2005). Towards 'probability literacy' for all citizens. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 43-71). Springer.
- Gal, I. (2012). Developing probability literacy: needs and pressures stemming from frameworks of adult competencies and mathematics curricula. En S.J. Cho (Ed.), *Proceedings of the 12th international congress on mathematical education*, (pp.1-7). Springer Open.

- García, D. y Cremades, R. (2019). Flipped classroom en educación superior. Un estudio a través de relatos de alumnos. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 24(80), 101-123.
- García, D., Garrido, R. y Marcos, M. Á. (2020). El uso de los cuentos y la creatividad para la formación del futuro profesorado de infantil en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 23(1), 161-174. <https://doi.org/10.6018/reifop.370071>
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39, 127-135. <https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1>
- Godino, J. D. y Batanero, C. (2011). Formación de profesores de matemáticas basada en la reflexión guiada sobre la práctica. En L. Serrano (Ed.), *Tendencias actuales de la investigación en educación estocástica* (pp. 9-33). Facultad de Humanidades y Educación.
- Gómez, E., Ortiz, J. J., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2013). El lenguaje de probabilidad en los libros de texto de Educación Primaria. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 35, 75-91.
- González, I., Benvenuto, G. y Lanciano, N. (2017). Dificultades de Aprendizaje en Matemática en los niveles iniciales: Investigación y formación en la escuela italiana. *Psychology, Society & Education*, 9, 135-145. <https://doi.org/10.25115/psye.v9i1.468>
- Gyöngyösi-Wiersum, E., Czapné Makó, Z. y Makrides, G. (2019). Situation games to ease transition between abstract and real life mathematics for primary school student teachers. *Annales Mathematicae et Informaticae*, 50, 205-216. <https://doi.org/10.33039/ami.2019.01.003>
- Korthagen, F.A. (2001). *Linking practice and theory. The pedagogy of realistic teacher education*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Lewis C. (2009). What is the nature of knowledge development in lesson study? *Educational Action Research*, 17(1), 95-110.
- Liñán, M., Barrera, V. y Infante, J. (2014). Conocimiento especializado de los estudiantes para maestro: La resolución de un problema con división de fracciones. *Escuela Abierta*, 17(1), 41-63. <https://doi.org/10.29257/EA17.2014.04>

- Liñán, M.M., Contreras, L.C. y Barrera, V. (2016). Conocimiento de los Temas (KoT). En J.Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 12 -20). SGSE.
- Mabova, M. J., Jita, L. C. y Chimbi, G. T. (2022). Reaping the rewards of professional development: evidence from mathematics teachers' pedagogical practices. *International Journal of Instruction*, 15(1), 873-890. <https://doi.org/10.29333/iji.2022.15150a>
- Montes, M., Carrillo, J., Contreras, L. C., Liñán-García, M. M. y Barrera-Castarnado, V. J. (2019). Estructurando la formación inicial de profesores de matemáticas: una propuesta desde el modelo MTSK. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 157-176). Ediciones Universidad Salamanca.
- Muñoz Catalán, M. C., Contreras, L. C., Carrillo, J., Rojas, N., Montes, M. Á. y Climent, N. (2015). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 18(3), 1801-1817.
- Murata, A. (2011). Introduction: Conceptual Overview of Lesson Study. En L. C. Hart, A. S. Alston, y A. Murata (Eds.), *Lesson Study Research and Practice in Mathematics Education*, (pp. 1–12). Springer. https://doi.org/10.1007/978-90-481-9941-9_1
- NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM.
- Pepin, B., Xu, B., Trouche, L. y Wang, C. (2017). Developing a deeper understanding of mathematics teaching expertise: an examination of three Chinese mathematics teachers' resource systems as windows into their work and expertise. *Educational Studies in Mathematics*, 94, 257-274. <https://doi.org/10.1007/s10649-016-9727-2>
- Perry, R. y Lewis, C. (2009). What is successful adaptation of lesson study in the US? *Journal of Educational Change*, 10(4), 365-391.
- Pourdavood, R. G. y Yan, M. (2021). Preparing Pre-service and In-service Teachers to Teach Mathematics and Science Using an Integrated Approach: The Role of a Six-Week Summer Course. *International Journal of Learning, Teaching and Educational Research*, 20(1), 64-85. <https://doi.org/10.26803/ijlter.20.1.4>

- Román-Traverso, Y. (2017). *Flipped Classroom: An alternative teaching method for introductory statistics courses*. Universidad de Puerto Rico.
- Salinas, J., Valdez-Monroy, J. C. y Salinas-Hernández, U. (2018). Un acercamiento a la metodología Lesson study para la enseñanza de la distribución normal. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar González, O. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII*, (pp. 525-534). SEIEM.
- Sanchez, E. y Chernoff, E. J. (2022). La Enseñanza y el Aprendizaje de la Probabilidad en el 14° Congreso Internacional de Educación Matemática: Continuación del Trabajo Continuo del Grupo de Estudio Temático 11. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 22(3), 513-520. <https://doi.org/10.1007/s42330-022-00246>
- Schoenfeld A. H. (2011). Toward professional development for teachers grounded in a theory of decision making. *ZDM Mathematics Education*, 43(4), 457–469. <https://doi.org/10.1007/s11858-011-0307-8>
- Shulman, L. (1987). Knowledge and Teaching Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 52(1), 1-30.
- Sosa, L., Aguayo, L. M. y Huitrado, J. L. (2013). KFLM: Un entorno de aprendizaje para el profesor al analizar los errores de los estudiantes. En C. Dolores, M. S. García, J. A. Hernández, y L.Sosa (Eds.). *Matemática Educativa: la formación de profesores* (pp. 279-298). D.F.: Díaz de Santos.
- Sosa, L., Flores-Medrano, E. y Carrillo, J. (2016). Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas del profesor cuando ejemplifica y ayuda en clase de álgebra lineal. *Educación Matemática*, 28(2), 151–174. <https://doi.org/10.24844/EM2802.06>
- Vásquez, C. y Alsina, Á. (2014). Enseñanza de la Probabilidad en Educación Primaria. Un Desafío para la Formación Inicial y Continua del Profesorado. *NÚMEROS, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 85, 5-23.
- Vásquez, C. y Alsina, Á. (2019a). Diseño, construcción y validación de una pauta de observación de los significados de la probabilidad en el aula de Educación Primaria. *REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 14, 1-20. <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2019.e62434>
- Vásquez, C. y Alsina, Á. (2019b). Observing Mathematics Teaching Practices to Promote Professional Development: An Analysis of Approaches to Probability. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 14(3), 719-733. <https://doi.org/10.29333/iejme/5866>

Zhang, S., Zhao, W. y Cao, Y. (2021). Toward sustainable professional development: An investigation of informal interactions among Chinese mathematics teachers. *Frontiers in Psychology, 12*, 681774. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2021.681774>