

EL CAMBIO: UN CONOCIMIENTO ESENCIAL DEL ÁLGEBRA TEMPRANA
CHANGE: AN ESSENTIAL KNOWLEDGE OF EARLY ALGEBRA

Ángel Alsina, Ph.D.

 <https://orcid.org/0000-0001-8506-1838>

Universidad de Girona, Girona, España
angel.alsina@udg.edu

Nataly Pincheira, Mgtr.

 <https://orcid.org/0000-0002-5051-964X>

Universidad de Girona, Girona, España
nataly.pincheira@udg.edu

ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN

Recibido: 21 de octubre de 2022

Aceptado: 2 de diciembre de 2022

RESUMEN

El cambio constituye un conocimiento esencial del álgebra temprana, puesto que permite desarrollar el pensamiento algebraico en general e impulsar el pensamiento funcional en particular. En la primera parte del artículo se fundamenta teóricamente el álgebra temprana y el cambio. A partir de ello, se plantea una propuesta de distribución de contenidos que permiten abordar el estudio del cambio en educación infantil, desde un enfoque holístico, y en educación primaria, a partir de las aportaciones que ofrecen los distintos bloques de contenido del currículo escolar. En la segunda parte, se presentan diversos recursos y actividades para trabajar el cambio de los 3 a los 12 años.

Palabras claves: cambio, álgebra temprana, pensamiento algebraico, pensamiento funcional, educación infantil y primaria.

ABSTRACT

Change is an essential knowledge of early algebra, since it allows the development of algebraic thinking in general and the development of functional thinking in particular. The first part of the article provides a theoretical foundation for early algebra and change. On this basis, a proposal is



put forward for the distribution of content that allows the study of change in Early Childhood Education to be tackled from a holistic approach and, in primary education, from the contributions offered by the different blocks of content in the school curriculum. In the second part, various resources and activities are presented to work on change from 3 to 12 years of age.

Keywords: change, early algebra, algebraic thinking, functional thinking, early childhood education and primary education.

INTRODUCCIÓN

Hasta hace relativamente pocas décadas, el término “álgebra” se había asociado exclusivamente a la abstracción y al simbolismo, y el alumnado establecía un primer contacto con conocimientos algebraicos como las ecuaciones o las funciones desde la nada, a partir de la educación secundaria o media.

Sin embargo, con la entrada del siglo XXI se produjo un punto de inflexión en la matemática escolar, cuando el NCTM (2003) publicó por primera vez estándares de contenido de álgebra a partir de los 3 años. ¿A qué fue debido? ¿cuáles fueron las razones que llevaron a esta asociación de profesores de matemáticas americana a incluir de forma explícita conocimientos algebraicos en el currículo de matemáticas desde la educación infantil?

Por un lado, se quería substituir un enfoque focalizado en la enseñanza de contenidos aislados por una visión basada en la competencia matemática, en la que se enfatizaba el aprendizaje a través de la resolución de problemas, el razonamiento, la comunicación, las conexiones y la representación (NCTM, 2003). Con ello, se pretendía dejar de lado una enseñanza para la escuela e impulsar un aprendizaje para la vida (Casey y Sturgis, 2018).

Por otro lado, se quería romper con una manera de enseñar matemáticas basada en la repetición, la reproducción y la mecanización para resolver ejercicios descontextualizados, por una visión orientada a promover la comprensión de las matemáticas. Precisamente en este punto es donde adquiere sentido plantear la presencia del álgebra desde los primeros niveles escolares, ya que se asocia a una manera de pensar y actuar con objetos, relaciones y situaciones matemáticas para suscitar una enseñanza fundamentada en la comprensión de las matemáticas (Bastable y Schifter, 2007; Carpenter et al., 2003).

La algebrización del currículo desde los primeros niveles emerge, pues, con la finalidad de integrar el pensamiento algebraico a lo largo de toda la escolaridad y facilitar una mejor comprensión de las matemáticas (Kaput, 2000). Esta “crisis curricular”, considerando que etimológicamente la palabra crisis significa avance, vino acompañada de un baile de términos

que se habían venido usando y/o que se han empezado a utilizar posteriormente en torno al álgebra: álgebra temprana, pre-álgebra, lógica, lógica matemática, razonamiento lógico, razonamiento lógico-matemático, etc. En Alsina (2019a) se trató de clarificar que los términos asociados a la “lógica” provenían de autores clásicos como Montessori, Piaget o Dienes que, a partir de sus planteamientos, habían promovido con éxito el desarrollo del pensamiento algebraico a través de distintos tipos de relaciones (clasificaciones, ordenaciones, correspondencias) y los patrones (seriaciones), principalmente. Asimismo, se aclaró también que el álgebra temprana y la pre-álgebra son enfoques previos a la enseñanza formal del álgebra en secundaria (Zapatera, 2018), que se diferencian en su finalidad y el momento de introducción: el álgebra temprana intenta introducir modos de pensamiento algebraico desde los primeros cursos escolares a través de las conexiones intradisciplinarias, es decir, integrada principalmente en otros bloques de contenido matemático como la numeración, la geometría, etc.; mientras que la “pre-álgebra” fue un intento de suavizar la transición entre la aritmética y el álgebra y reducir las dificultades que sufre el alumnado en el aprendizaje del álgebra en secundaria, por lo que propone introducir el álgebra como una aritmética generalizada en los últimos cursos de primaria.

Este artículo se focaliza en el álgebra temprana, por su relevante papel en las primeras edades, y más concretamente en una de sus facetas quizás más desconocidas: el cambio. Desde este punto de vista, en la primera parte del artículo se fundamenta teóricamente el álgebra temprana en general y el cambio en particular, junto con una propuesta de distribución de contenidos por edades; en la segunda parte, se presentan diversos recursos y actividades para trabajar el cambio de los 3 a los 12 años.

El cambio: un conocimiento esencial del álgebra temprana en infantil y primaria.

El álgebra temprana forma parte de una propuesta de cambio curricular que, como se ha indicado, emerge como resultado de diversos estudios que promueven la introducción del pensamiento algebraico desde los primeros niveles (Bastable y Schifter, 2007; Carraher y Schliemann, 2007; Kaput, 1998, 2000; Kaput et al., 2009). Sintéticamente, esta nueva corriente no considera el álgebra como una asignatura, y su principal finalidad es desarrollar modos de pensamiento que atiendan a la estructura que subyace a las matemáticas, por medio de tareas dirigidas a la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas, donde los niños y las niñas exploren, hagan predicciones, discutan, argumenten y comprueben ideas (Blanton y Kaput, 2005). En este sentido, Kieran (2004, p. 149) subraya que:

El pensamiento algebraico en los primeros cursos académicos implica el desarrollo de diversos tipos de reflexiones como parte de las actividades en los que puede utilizarse la representación simbólica algebraica mediante letras como herramienta, pero no exclusiva, del álgebra, de modo que pueda llevarse a cabo también sin ningún tipo de representación simbólica con letras, como por ejemplo el análisis de las relaciones entre cantidades, identificar estructuras, estudiar el cambio, la generalización, la resolución de problemas, el modelado, la justificación, el ensayo y error y la predicción.

Por otra parte, Radford (2011) señala que “el pensamiento algebraico temprano se basa en las posibilidades del alumnado de comprender patrones en formas co-variantes desarrolladas culturalmente y utilizarlos para tratar cuestiones de términos remotos y no específicos” (p. 23), es decir, para alcanzar un desarrollo del pensamiento algebraico temprano los niños y las niñas deben identificar regularidades relacionando tanto estructuras numéricas como espaciales.

Los currículos contemporáneos de educación infantil no han quedado ajenos a esta innovación (e.g., Australian Curriculum, Assessment And Reporting Authority [ACARA], 2015; Ministerio de Educación [MINEDUC], 2018; Ministry of Education Singapore, 2013; NCTM, 2003) y han asumido la importancia de los contenidos vinculados con el álgebra temprana, incorporado conocimientos de naturaleza algebraica de manera progresiva a partir de las primeras etapas escolares. A partir de la revisión de estos currículos, Pincheira y Alsina (2021, p. 175-176) caracterizan el álgebra temprana como:

la capacidad de desarrollar modos de pensamiento algebraico durante las primeras edades en situaciones vinculadas tanto al álgebra propiamente como a otras áreas del currículo de matemática, tales como números, geometría, medida, etc. Para empoderar estos modos de pensamiento algebraico, se debería capacitar a todos los niños y niñas de Educación Infantil para experimentar con elementos u objetos a partir del reconocimiento de atributos con el propósito de establecer relaciones (clasificaciones, ordenaciones, correspondencia, etc.), realizar seriaciones a partir de patrones de repetición (identificación, construcción y representación del patrón) y describir cambios cualitativos y cuantitativos; y se debería capacitar a todos los niños y niñas de Educación Primaria para comprender distintos tipos de relaciones (de equivalencia, de orden, etc.) y de patrones (de crecimiento, de decrecimiento, etc.), usar símbolos algebraicos y modelos matemáticos para representar situaciones matemáticas, comprender el cambio y usar variables para determinar una constante o incógnita.

Como se observa, el cambio forma parte de la caracterización del álgebra temprana tanto en educación infantil como en educación primaria. Pero, ¿qué es el cambio?, ¿qué contenidos se asocian al cambio?, ¿con qué modo de pensamiento algebraico se vincula?

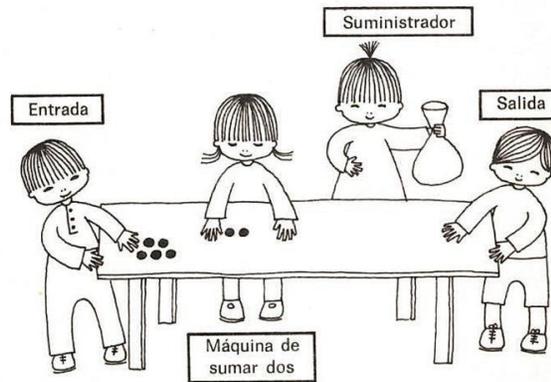
Las primeras referencias a la idea de cambio se han identificado en Dienes (1971a, 1971b) y Dienes y Golding (1976). Dienes (1971a), por ejemplo, vincula la idea de cambio con las operaciones, en las que los operadores son el elemento que hacen posible dicho cambio o transformación. Dienes y Golding (1976, p. 52) añaden que “la idea de transformación o función crea una situación a partir de otra situación”. En este sentido, el mensaje principal de los planteamientos de este autor en torno a esta cuestión es que:

Para facilitar al niño la adquisición de la abstracción que supone la teoría de los estados y los operadores, sugerimos el empleo lo más temprano posible de muchos operadores distintos de diferente naturaleza. Si el niño no adquiere más que experiencia de operadores de carácter aritmético, llegará a creer que no existe otra clase de operadores. Es evidente que no es así (Dienes, 1971a, p. 9)

Desde este punto de vista, además de los cambios de carácter aritmético, este autor plantea cambios de carácter geométrico (p. ej., un giro es un operador que actúa en la posición); de atributos físicos como el color (p. ej., cuando se pinta de color rojo y se añade amarillo para obtener el naranja, se usa un operador (añadir amarillo) para convertir en naranja lo que era rojo); etc. En relación a los cambios de carácter aritmético, Dienes (1971b) propone juegos “estado-operador” a partir de máquinas: a partir de un elemento de un conjunto, denominado *entrada* o estado inicial, se obtiene otro, denominado *salida* o estado final, por medio de un *operador* que es el que da lugar al cambio. En la Figura 1 se observa cómo, en una máquina de sumar dos: 1) el niño “entrada” decide, por ejemplo, colocar cinco fichas a la entrada, y las cuenta de una en una; 2) el niño “operador” de la máquina las toma y añade dos fichas más; 3) luego el niño que hace de “administrador” las recoge y las entrega al niño “salida”; 4) el niño “salida” las cuenta y halla que hay siete fichas.

Figura 1.

Juego estado-operador-estado con adición

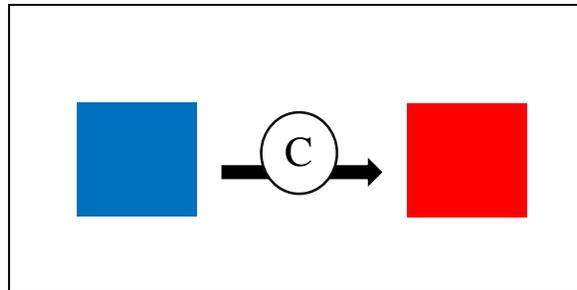


Fuente: Dienes (1971b, p. 13)

En relación a los cambios de atributos físicos, Dienes y Golding (1976), plantean juegos de transformaciones y también juegos de diferencias a partir de los Bloques Lógicos. Los juegos de transformaciones se basan en operadores como el cambio de color (C), el cambio de tamaño (T), el cambio de grosor (G), etc. (Figura 2).

Figura 2.

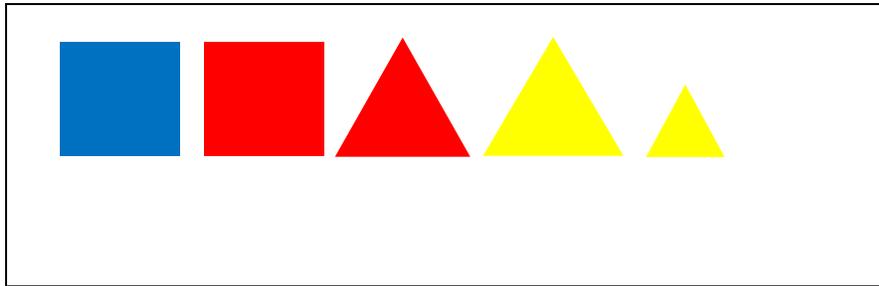
Juego de diferencias a partir del cambio de color



El juego de las diferencias consiste en formar sucesiones encadenando bloques que tengan una o más diferencias con respecto a la pieza inmediata anterior (Figura 3). Si se juega con una sola diferencia, por ejemplo, se pide a los niños que, a partir de una pieza cualquiera, por turnos, vayan colocando sucesivamente piezas con la condición de que entre pieza y pieza cambie un atributo: en la Figura 3 se observa que entre el cuadrado azul, grande y grueso y el cuadrado rojo, grande y grueso cambia el color; entre el cuadrado rojo, grande y grueso y el triángulo rojo, grande y grueso cambia la forma; y así sucesivamente.

Figura 3.

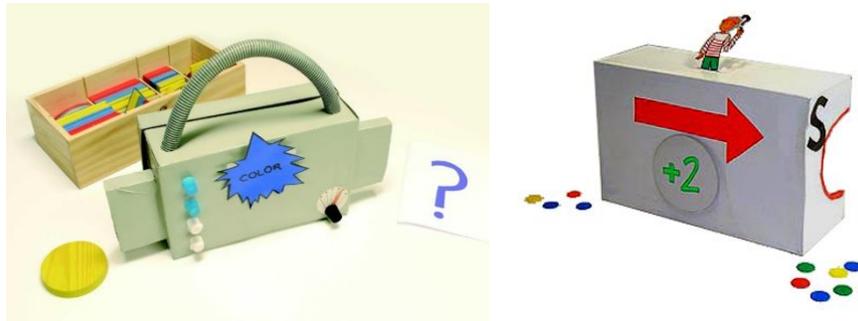
Sucesiones de diferencias



Posteriormente, tanto Canals (1989) como Alsina (2006) han recogido estas ideas de Dienes en torno al cambio y han planteado máquinas de cambiar cualidades y cantidades como las que se muestran en la Figura 4.

Figura 4.

Máquinas de cambiar cualidades y cantidades

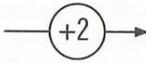


Fuente: GAMAR

Con el propósito de ir consolidando esta idea de cambio en las aulas, Alsina (2006) retoma los planteamientos de Dienes y subraya que es necesario evitar que se interiorice una concepción estereotipada de la noción de operación, asociándola exclusivamente a la operación aritmética. En este sentido, recuerda que “el significado de operación es mucho más amplio, y hay que asociarlo a un cambio, a una transformación a partir de una situación inicial” (p. 68). Añade, además, que hay diferentes tipos de operaciones en las que cambia el objeto matemático (atributos físicos, cantidades de elementos, posiciones, figuras geométricas, ...), pero la estructura interna es siempre la misma (Figura 5).

Figura 5.

Diversos tipos de operaciones en matemáticas

Tipo de operación	Situación inicial	Transformación, cambio	Situación final
Logicomatemática			
Aritmética			
Aritmética, utilizando símbolos matemáticos	4		6
Geométrica			

Fuente: Alsina (2006, p. 69)

En definitiva, pues, el cambio es el elemento central de las operaciones matemáticas. A través de un cambio o transformación, que se expresa en forma de un operador, se obtiene una situación final diferente de la inicial, salvo en el caso de que el operador sea neutro. Como se aprecia en los ejemplos de la Figura 5, el operador es en realidad el símbolo que indica una operación.

El NCTM (2003) considera este enfoque del cambio y lo incluye como un estándar de contenido más dentro del álgebra desde los tres años. Esta asociación de profesores de matemáticas americana señala que “el cambio es una idea importante con la que se encuentran pronto los niños” (p. 99). Desde este punto de vista, indican que durante la educación infantil y los primeros cursos de primaria (3-8 años), el alumnado puede describir cambios tanto cualitativos como cuantitativos:

- Cambios cualitativos: cuando cambian atributos físicos. Por ejemplo, cuando el alumnado recoge datos del tiempo atmosférico, pueden expresar que “hoy hace más calor que ayer”; asimismo, cuando juegan a hacer sucesiones de diferencias con los Bloques Lógicos de Dienes o cualquier otro material lógico estructurado, también pueden describir el cambio cualitativo que se produce entre pieza y pieza.
- Cambios cuantitativos: cuando cambian cantidades. Por ejemplo, cuando un niño o una niña recoge datos del propio peso, puede expresar que este año pesa 2kg más que el año pasado.

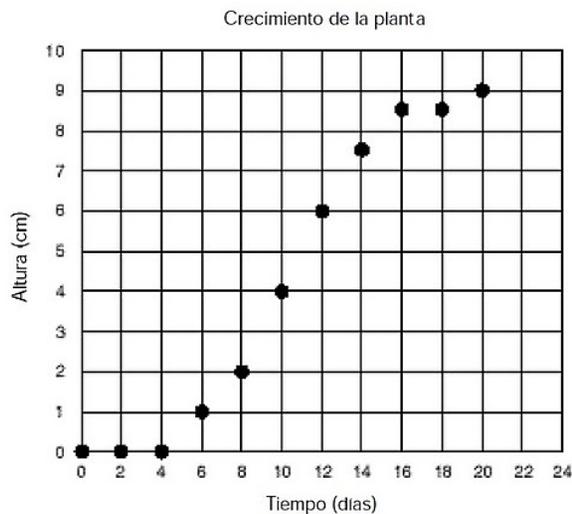
Así, para el NCTM (2003), “comprender que la mayoría de cosas cambia con el tiempo, que muchos cambios pueden describirse matemáticamente y son predecibles, ayuda a tener una base para aplicar las matemáticas a otros campos y para entender el mundo” (p. 99).

En el resto de niveles de primaria (8-12 años), el cambio puede empezar a estudiarse usando herramientas del álgebra, analizando la tasa de cambio. Por ejemplo, si plantamos unas semillas se puede ir registrando el crecimiento de las plantas con el apoyo de representaciones tabulares y gráficas y, de este modo, describir como varía la tasa de cambio a través del tiempo: “las plantas no han crecido durante los primeros cuatro días, en los dos días siguientes, ha crecido despacio; luego ha empezado a crecer más deprisa y, después, otra vez despacio” (Figura 6). En esta situación, pues, no se fijan solamente en la altura, sino en lo que va ocurriendo entre las alturas registradas. Otra situación, por ejemplo, puede consistir en entregar garbanzos a los niños y pedirles que analicen cuántos triángulos pueden construir con 3 garbanzos, con 4 garbanzos, y así sucesivamente (Cardet, 2009).

Figura 6.

Tabla y gráfico con la tasa de cambio del crecimiento de las plantas

Tiempo (días)	Altura (cm)	Cambio (cm)
0	0	
2	0	0
4	0	0
6	1	1
8	2	1
10	4	2
12	6	2
14	7.5	1.5
16	8.5	1
18	8.5	0
20	9	0.5



Fuente: NCTM (2003, p. 167)

En los ejemplos descritos se observa que la tasa de cambio puede ser *constante*, cuando es siempre la misma, o bien *creciente* o *decreciente*, cuando aumenta o disminuye, respectivamente. En el caso del juego de las diferencias la tasa es constante, ya que entre una pieza y otra siempre cambia uno, dos o tres atributos, en función del nivel de dificultad que se pretenda; mientras que en el ejemplo de las plantas o de los garbanzos, la tasa de cambio es creciente.

Como se ha visto, todo este proceso de análisis del cambio se puede apoyar a partir de máquinas (Alsina, 2006; Canals, 1989; Dienes, 1971a), junto con el uso de representaciones tabulares y gráficas, a medida que aumenta el nivel (NCTM, 2003). En relación a las máquinas, autores como Willoughby (1997) y Warren et al. (2013) han utilizado el término “máquinas de funciones” para el caso concreto de las máquinas que cambian cantidades. Estas máquinas son el paso manipulativo previo de las expresiones algebraicas que representan funciones. Para Warren et al. (2013, p.76):

el concepto de función es fundamental para prácticamente todos los aspectos de las matemáticas y todas las ramas de la ciencia cuantitativa. Actualmente, este tipo de pensamiento está aislado en el nivel secundario, y sin embargo tiene muchos beneficios para que los estudiantes más jóvenes puedan profundizar en la comprensión de la aritmética. Esto es particularmente así en la forma en que las operaciones pueden considerarse como "cambios" y cómo las funciones ilustran explícitamente el modo en que la suma y la resta (y la multiplicación y la división) son operaciones inversas, en las que cada una "deshace" a la otra.

Por esta razón, el análisis del cambio está relacionado con el pensamiento funcional (Warren y Cooper, 2005), que es uno de los modos de pensamiento propios del pensamiento algebraico, junto con el pensamiento relacional (Carpenter et al., 2005).

De todas formas, si bien el cambio y el pensamiento funcional están relacionados, han mantenido hasta el momento una diferencia relevante: mientras que el pensamiento funcional se ha focalizado en las relaciones existentes entre cantidades que covarían conjuntamente (Blanton y Kaput, 2004), la noción de cambio ofrece una visión mucho más amplia que, además de los cambios de cantidades de elementos, incluye también cambios de otra naturaleza (cualitativos, geométricos, etc.), como se ha descrito. Desde este foco más amplio, en la Tabla 1 se muestran los estándares de contenido asociados al cambio que plantea el NCTM (2003).

Tabla 1.

Estándares de contenido sobre el cambio para el alumnado de 3 a 12 años (NCTM, 2003, p. 402)

Etapa	Expectativas de aprendizaje sobre el cambio
Etapa Pre-K-2 (3-8 años)	describir cambios cualitativos, como “ser más alto”; describir cambios cuantitativos, como el aumento de estatura de un alumno en dos pulgadas en un año.

Etapa 3-5	investigar de qué manera el cambio que experimenta una variable se relaciona con el de una segunda variable;
(9-12 años)	identificar y describir situaciones con tasas de cambio constantes o variables, y compararlas.

El cambio se encuentra estrechamente vinculado al estándar de contenido de álgebra, puesto que es fundamental para comprender la noción de función y fomentar el proceso de generalización (NCTM, 2003). No obstante, la riqueza que ofrece el tratamiento del cambio, al ser un contenido aplicable a distintas situaciones de enseñanza, permite que sea abordado en otros ejes de contenido.

En la siguiente sección se presenta una distribución por edades de los contenidos vinculados al cambio, desde una perspectiva holística en educación infantil y en educación primaria considerando los diferentes ejes del currículo de matemática.

Distribución de contenidos para abordar el estudio del cambio en educación infantil y primaria (3 a 12 años)

Desde el punto de vista algebraico, se asume que el cambio se refiere a la variación o transformación que experimenta un determinado objeto matemático, de un estado inicial a otro diferente, a partir de un operador. Por tanto, el estudio del cambio puede trascender a otros bloques de contenido matemático (numeración, geometría, etc.), según la naturaleza de dicho operador (Alsina, 2022).

A partir de esta conceptualización, se han analizado: a) los estándares de contenido propuestos por el NCTM (2003) que se vinculan con el estudio del cambio; b) los contenidos de álgebra temprana, numeración, geometría, medida y estadística y probabilidad para la educación infantil (Alsina, 2022); y c) los contenidos para operar con cantidades de elementos, objetos algebraicos, posiciones y formas, magnitudes, datos y hechos en educación primaria (Alsina, 2019b).

Dicho análisis ha permitido elaborar una propuesta de contenidos que permiten abordar el estudio del cambio. En educación infantil (3 a 6 años), se plantea el tratamiento del cambio desde un enfoque holístico, como se observa en la Tabla 2.

Tabla 2.

Distribución de contenidos sobre el cambio de 3 a 6 años

Contenidos matemáticos

- Observación de cambios cualitativos y cuantitativos en el entorno cercano y en los propios niños.
 - Introducción de operadores directos sencillos para realizar cambios cualitativos (forma, color, tamaño, grosor) a través de la máquina de cambiar cualidades.
 - Introducción de operadores directos sencillos para realizar cambios cuantitativos (añadir tres, quitar dos) a través de la máquina de cambiar cantidades.
 - Introducción de operadores neutros e inversos.
 - Introducción de sucesiones de diferencias (denominadas también cadenas de cambios).
 - Empleo de cuantificadores para describir cambios.
 - Problemas de cambio aumentado (final desconocido) resuelto a través de conteo de todos los elementos.
 - Problemas de cambio disminuido (final desconocido) a través de la estrategia de quitar.
 - Problemas de cambio aumentado (cambio desconocido) con la estrategia de conteo progresivo.
 - Problemas de cambio disminuido (cambio desconocido) a través de la estrategia de separar.
-

El estudio del cambio en educación infantil se inicia con la observación de cambios en el entorno cercano y la introducción de los operadores directos, neutros e inversos a partir de materiales manipulativos (máquinas de cambios). Posteriormente, se avanza hacia las sucesiones de diferencias y el empleo de cuantificadores para describir cambios.

Por último, se abordan problemas de cambio aumentado o disminuido, apoyándose en las nociones del conteo y estrategias de quitar o separar.

Por otra parte, en el caso de la educación primaria (6 a 12 años), se plantean una serie de contenidos para trabajar el cambio, a partir de los distintos bloques de contenido del currículo escolar.

La Tabla 3, muestra los contenidos para aborda el estudio del cambio de 6 a 8 años.

Tabla 3.

Distribución de contenidos sobre el cambio de 6 a 8 años

Ejes	Contenidos matemáticos
Números y operaciones	<ul style="list-style-type: none"> - Empleo de cuantificadores para describir cambios. - Comprensión de los significados de la adición y sustracción de números naturales. - Estimación de cantidades al agregar o quitar elementos usando como referente una situación concreta. - Problemas resolubles por estrategias aditivas a través del conteo a partir del mayor sumando. - Problemas resolubles por estrategias sustractivas a través del conteo progresivo y regresivo. - Composiciones y descomposiciones de números naturales. - Inicio de la comprensión de los significados de la multiplicación y división de números naturales.
Álgebra	<ul style="list-style-type: none"> - Descripción de cambios cualitativos y cuantitativos - Experimentación de cambios a través de la máquina de cambiar cualidades y cantidades discretas de elementos: planteamiento directo e inverso. - Inicio a las sucesiones de diferencias (denominadas también cadenas de cambios).
Geometría	<ul style="list-style-type: none"> - Descripción de cambios de la posición relativa de objetos y personas en relación a sí mismos usando un lenguaje común (adelante-atrás; izquierda-derecha). - Reconocimiento en el entorno de figuras planas que estén trasladadas, reflejadas y rotadas. - Exploración de movimientos (giros y traslaciones) en desplazamientos y simetrías. - Composición y descomposición de figuras.
Medida	<ul style="list-style-type: none"> - Composición y descomposición de una magnitud concreta en diversas partes de la misma.
Análisis de datos y probabilidad	<ul style="list-style-type: none"> - Representación de datos que involucren situaciones de cambio mediante objetos concretos, dibujos y gráficos. - Uso de gráficos (de barras simples, principalmente) para analizar situaciones que involucren cambios. - Predicción de probabilidades a partir de experimentos sencillos que involucren situaciones de cambio.

A diferencia de la educación infantil, en los primeros años de educación primaria el estudio del cambio se vincula principalmente con la estimación de cantidades y la comprensión de los significados de las operaciones básicas (adición, sustracción, multiplicación y división). A su vez, es posible describir y experimentar cambios a través de la posición de objetos y figuras, la composición y descomposición de magnitudes, el uso y representación de datos y la predicción de probabilidades.

Posteriormente, como se aprecia en la Tabla 4, en el tercer y cuarto nivel de educación primaria (8 a 10 años), el cambio se incorpora con la consolidación de la comprensión de la multiplicación y división, además de la introducción de los números racionales (fracciones y decimales). Se analizan situaciones de cambios y otras que se mantienen constantes, avanzando hacia la noción de función.

Por otra parte, se profundiza en la noción de ángulos vinculados con los giros y la simetría, así como la composición y descomposición de magnitudes, análisis de datos a partir de tablas y gráficas y, finalmente, la resolución de problemas vinculados al azar.

Tabla 4.

Distribución de contenidos sobre el cambio de 8 a 10 años

Ejes	Contenidos matemáticos
Números y operaciones	<ul style="list-style-type: none"> - Comprensión de la multiplicación como suma repetida y como área. - Comprensión de la división como parte de una unidad (fracción) y como reparto. - Composición y descomposición de números naturales y racionales.
Álgebra	<ul style="list-style-type: none"> - Análisis de situaciones en las que se producen cambios y otras que se mantienen constantes. - Introducción a la noción de función. - Introducción a las máquinas de funciones.
Geometría	<ul style="list-style-type: none"> - Introducción a la noción de ángulos vinculados a los giros. - Reconocimiento de distintos tipos de ángulos. - Reconocimiento de simetría axial y central. - Composición y descomposición de figuras.
Medida	<ul style="list-style-type: none"> - Composición y descomposición de una magnitud concreta en diversas partes de la misma.

Análisis de datos y probabilidad	-	Análisis de datos que representan situaciones en las que se producen cambios a partir de tablas y gráficos (de barras, de puntos, etc.).
	-	Introducción a la noción de media aritmética y su aplicación en la resolución de problemas.
	-	Resolución de problemas donde intervengan factores de azar.

Finalmente, como se observa en la Tabla 5, en los últimos años de educación primaria (10 a 12 años) el cambio se materializa con el cálculo de porcentajes y operatoria con números decimales. A su vez, se profundiza en la noción de función, la aplicación de transformaciones isométricas, la conversión entre unidades de una misma magnitud, la representación de datos y el análisis de situaciones donde interviene la probabilidad.

Tabla 5

Distribución de contenidos sobre el cambio de 10 a 12 años

Ejes		Contenidos matemáticos
Números y operaciones	-	Cálculo de porcentajes.
	-	Operatoria con números decimales.
Álgebra	-	Análisis de situaciones en las que se producen cambios y otras que se mantienen constantes.
	-	Noción de función.
	-	Máquinas de funciones.
Geometría	-	Comprensión del eje de simetría: a) identificar figuras simétricas; b) crear figuras simétricas; c) identificar y dibujar una o más líneas simetría en figuras planas.
	-	Aplicación de traslaciones, simetrías y rotaciones a figuras planas (figuras congruentes).
	-	Composición y descomposición de figuras.
Medida	-	Composición y descomposición de una magnitud concreta en diversas partes de la misma.
	-	Conversiones entre unidades de una misma magnitud a través del cálculo.

- Análisis de - Representación de datos de situaciones en las que se producen cambios a partir de
 datos y tablas y gráficos (histogramas, circulares, etc.).
 probabilidad - Analizar situaciones problemáticas donde la probabilidad de ocurrencia se puede
 ver afectada (cambiar) en base a la información que se dispone.
 - Realización de predicciones y discusión si los resultados obtenidos concuerdan o
 no con las predicciones.

Recursos y actividades para trabajar el cambio de 3 a 12 años

El estudio del cambio en educación infantil y primaria requiere de la implementación de tareas que contribuyan progresivamente al desarrollo del pensamiento funcional. A partir de los conocimientos que se han descrito en el apartado anterior, se presentan una serie de actividades y recursos orientadas a trabajar el cambio.

El agua que camina

En la Tabla 6 se propone una actividad para describir cambios cualitativos, orientada a niños y niñas de 3 a 4 años de educación infantil.

Tabla 6.

Datos descriptivos de la actividad

Título	El agua que camina
Edad	3 a 4 años
Objetivo	Reconocer cambios cualitativos
Contenidos matemáticos	Observación de cambios en el entorno. Introducción de cadenas de cambios.

Material necesario (Figura 7):

Figura 7. (a)

Envases de cristal, pintura de base acuática, papel de cocina y agua; (b) Implementación del material.



Gestión de la actividad:

- Reunir a los niños y niñas en pequeños grupos de trabajo.
- Presentar a cada grupo el material (Figura 7a) e invitar a los niños y niñas a diluir unas gotas de pintura en el agua que contiene cada envase de cristal y posteriormente introducir el papel de cocina (Figura 7b).
- Mientras ejecutan la actividad realizar preguntas que permitan generar hipótesis sobre lo que sucederá con el papel.
- Comprobar o refutar las hipótesis planteadas.

Preguntas intencionadas:

- ¿Qué le ocurrió al agua cuando diluimos la pintura?, ¿Crees que sucederá lo mismo con el papel de cocina cuando se sumerja en los envases con agua?
- ¿Por qué crees que sucederá esto?
- ¿Qué le ocurrió al papel de cocina?, ¿sucedió lo que pensabas?

Observando el crecimiento del ajo

En la Tabla 7, se observan los datos descriptivos de la actividad vinculada a describir cambios cuantitativos, dirigida a niños y niñas de 5 a 6 años de educación infantil.

Tabla 7.

Datos descriptivos de la actividad

Título	Observando el crecimiento del ajo
Edad	5 a 6 años
Objetivo	Reconocer cambios cuantitativos
Contenidos matemáticos	Observación de cambios en el entorno cercano. Empleo de cuantificadores para describir cambios. Uso de tablas para registrar datos.

Material necesario (Figura 8):

Figura 8.

Ajos, envases de cristal, tierra y agua



Fuente: Pincheira et al. (en revisión)

Gestión de la actividad:

- Poner el material al alcance de los niños y las niñas, como se observa en la Figura 8.
- Proponer a cada uno de los niños y niñas plantar un ajo en un envase de cristal.
- Mientras ejecutan la acción realizar preguntas que permitan generar hipótesis sobre lo que sucederá con el ajo en los días próximos.
- Observar día tras día los cambios en el crecimiento del ajo.
- Medir el crecimiento del ajo y registrar los datos en una tabla de valores.

- Comprobar o refutar las hipótesis planteadas.

Preguntas intencionadas:

- ¿Cuánto tiempo creen que demorará en crecer cada ajo plantado?, ¿todos los ajos crecerán en igual tamaño al mismo tiempo?
- ¿Cómo podemos saber cuánto crecen?, ¿qué herramienta podemos utilizar para medir el crecimiento del ajo?
- ¿Cuánto más creció hoy el ajo en comparación con ayer? ¿y si comparamos su crecimiento con tres días atrás?

Creación de collares con piezas de madera

Una actividad para abordar la comprensión de cambios cuantitativos, se observa en la Tabla 8, dirigidas a niños y niñas del primer y segundo nivel de educación primaria.

Tabla 8.

Datos descriptivos de la actividad

Título	Creación de collares con piezas de madera
Edad	6 a 8 años
Objetivo	Identificar y describir cambios cuantitativos
Contenidos matemáticos	<p>Descripción de cambios cuantitativos.</p> <p>Estimación de cantidades al agregar o quitar elementos usando como referente una situación concreta.</p> <p>Problemas resolubles por estrategias aditivas a través del conteo a partir del mayor sumando.</p>

Material necesario (Figura 9):

Figura 9.

Hilo, piezas de madera y tijeras.



Gestión de la actividad:

- Poner el material al alcance de los niños y niñas para que exploren libremente (Figura 9).
- Proponer construir un collar con las piezas de madera.
- Fomentar, a través del diálogo conjunto, las acciones que han desarrollado para seleccionar las piezas y construir el collar.

Preguntas intencionadas:

- ¿Cómo son las piezas que seleccionaste para construir el collar?
- ¿Cuántas piezas tiene tu collar?
- Si tiene “ x ” piezas y te doy “ y ” piezas más, ¿cuántas piezas tendrá tu collar?, ¿cómo lo sabes?

¿Cómo varía el consumo energético familiar?

La actividad que se describe en la Tabla 9, permite alcanzar la comprensión del cambio en niños y niñas de tercer y cuarto nivel de educación primaria.

Tabla 9.

Datos descriptivos de la actividad

Título	¿Cómo varía el gasto energético familiar?
Edad	8 a 10 años

Objetivo	Identificar cambios a partir de la lectura de gráficos
Contenidos matemáticos	Análisis de situaciones en las que se producen cambios y otras que se mantienen constantes. Análisis de datos que representan situaciones en las que se producen cambios a partir de tablas y gráficos.

Material necesario (Figura 10):

Figura 10.
Facturas de luz.



Fuente: Naturgy (2022)

Gestión de la actividad:

- Al iniciar la clase cada escolar debe contar con la factura energética familiar (Figura 10).
- Iniciar el diálogo sobre los datos que representa la gráfica que se emite en la factura sobre el consumo energético.
- Realizar la lectura de la gráfica y extraer información.
- Realizar comparaciones en las variaciones del consumo energético.

Preguntas intencionadas:

- ¿Cuál es el consumo energético familiar de los últimos 60 días? ¿Qué variables puedes identificar en el consumo energético?, ¿cómo se relacionan dichas variables?

- ¿Cuál es el periodo mensual en que se ha consumido menos kWh?, ¿Cuál es el periodo mensual en que se ha consumido más kWh?
- ¿Cuánto ha variado el consumo energético en relación con los dos últimos periodos mensuales?

Analizando cambios: altura versus edad

La actividad que se describe en la Tabla 10, permite alcanzar la comprensión del cambio en estudiantes de los últimos grados de educación primaria.

Tabla 10.

Datos descriptivos de la actividad

Título	Analizando cambios: altura versus edad
Edad	10 a 12 años
Objetivo	Analizar el cambio y comprender cómo el cambio en una variable puede relacionarse con el cambio en una segunda variable
Contenidos matemáticos	<p>Análisis de situaciones en las que se producen cambios y otras que se mantienen constantes.</p> <p>Composición y descomposición de una magnitud concreta en diversas partes de la misma.</p> <p>Representación de datos de situaciones en las que se producen cambios a partir de tablas y gráficos.</p>

Material necesario (Figura 11):

Figura 11.
Cintas métricas



Gestión de la actividad:

- Reunir a los estudiantes en pequeños grupos de trabajo.
- Proponer a cada grupo realizar una encuesta, que permita obtener información sobre la edad de 15 compañeros de distintos niveles escolares y sus respectivas estaturas.
- Aplicar la encuesta y medir con la ayuda de una cinta métrica (Figura 11), las estaturas de los estudiantes que participen de la encuesta.
- A partir de la información obtenida, invitar a los estudiantes a organizar los datos en una tabla de valores.
- Discutir, a través del diálogo conjunto, sobre la relación que existe entre las variables involucradas en la situación planteada.

Preguntas intencionadas:

- ¿Qué variables están involucradas en la situación planteada?
- ¿Cómo podemos organizar los datos recogidos en la encuesta?
- ¿Cómo los cambios en las edades de los estudiantes se relacionan con los cambios en sus estaturas?, ¿qué relación existe entre la altura y la edad?, ¿por qué?

CONCLUSIONES

El cambio se considera uno de los elementos centrales del álgebra temprana, puesto que promueve el desarrollo del pensamiento algebraico en general e impulsa el pensamiento funcional en particular (Warren y Cooper, 2005). Pese a la importancia que tiene el cambio en el desarrollo del pensamiento algebraico, pareciera ser uno de los elementos más desconocidos del álgebra, no obstante, se encuentra presente en diversas situaciones de la vida cotidiana.

La génesis de la idea de cambio ha sido planteada por Dienes (1971a, 1971b), quien materializa esta noción a partir del uso de operadores para facilitar al niño la adquisición de la abstracción. Este autor plantea una visión amplia de los operadores, considerando operadores de carácter aritmético, geométricos o de atributos físicos, como el color, la forma o el tamaño. Consecuentemente, estos operadores contribuyen de alguna manera a desarrollar el pensamiento funcional.

Castro et al. (2017) afirman que los niños y niñas de educación infantil pueden realizar análisis de situaciones estudiando el cambio. De acuerdo con el NCTM (2003), abordar las ideas relativas al cambio desde un enfoque más explícito en los primeros niveles, promueve que los estudiantes construyan una base sólida para afrontar el cálculo, es decir, ayuda a una mejor comprensión de los procesos aritméticos, permitiendo establecer relaciones entre las operaciones, por ejemplo, la relación inversa entre la suma y la resta y, la multiplicación y división (Warren y Cooper, 2001; Warren y Cooper, 2005).

Asimismo, el desarrollo de tareas vinculadas con el análisis de cambios, ya sean cualitativos o cuantitativos, es fundamental para comprender las funciones y fomentar la capacidad para generalizar, representar, justificar y razonar, estableciendo relaciones matemáticas en las etapas educativas posteriores (Blanton et al., 2011; NCTM, 2003).

La noción de cambio generalmente no es comprendida en profundidad, por tanto, es necesario que el profesorado introduzca desde la educación infantil (3 a 6 años) situaciones de cambio que los niños y niñas puedan explorar, permitiendo describir cambios cualitativos, cuantitativos y comprender que algunos cambios son predecibles. Mientras que, en educación primaria (6 a 12 años) el estudio del cambio se puede llevar a cabo utilizando herramientas propias del álgebra a través del uso de variables, como también, apoyarse en las herramientas que otorgan otros bloques de contenido matemático, por ejemplo, el uso de tablas de datos y gráficas.

Desde este prisma, en el artículo se ha aportado una distribución de contenidos para profundizar en el estudio del cambio en educación infantil y primaria (3 a 12 años), así como una serie de recursos y actividades para trabajar dichos conocimientos. Tales actividades, se centran en las relaciones y transformaciones que experimentan elementos u objetos que están relacionados entre sí y cambian. Esto último, hace posible que los estudiantes elaboren y verifiquen conjeturas en relación con la comprensión del cambio.

Como se ha indicado, las actividades que se han proporcionado en el artículo responden a un enfoque específico, como es el cambio, permitiendo avanzar hacia el desarrollo del pensamiento funcional. Sin embargo, alcanzar dicho modo de pensamiento, requiere de la incorporación de tareas desde los primeros años de escolaridad y, por tanto, debe ser gradual y ocurrir en un largo periodo de tiempo. En este contexto, animamos al profesorado a generar oportunidades de aprendizaje e incluir en sus prácticas pedagógicas actividades vinculadas al estudio del cambio.

AGRADECIMIENTOS:

Este trabajo fue apoyado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo del Gobierno de Chile (ANID), mediante una beca de doctorado en el extranjero (Universidad de Girona, España).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority [ACARA]. (2015). *The Australian Curriculum: Mathematics*. Recuperado de <https://www.australiancurriculum.edu.au/f-10-curriculum/mathematics/>
- Alsina, Á. (2006). *Como desarrollar el pensamiento matemático de 0 a 6 años*. Editorial Octaedro-Eumo.
- Alsina, Á. (2019a). Del razonamiento lógico-matemático al álgebra temprana en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 8(1), 1-19.
- Alsina, Á. (2019b). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (6-12 años)*. Graó.
- Alsina, Á. (2022). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (3-6 años)*. Graó.
- Bastable, V., y Schifter, D. (2007). Classroom stories: examples of elementary students engaged in Early Algebra. En J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 165-184). Lawrence Erlbaum Associates.

- Blanton, M., y Kaput, J. J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. Hoines y A.Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen University College.
- Blanton, M., y Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412-446. <https://doi.org/10.2307/30034944>
- Blanton, M., Levi, L., Crites, T., y Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Canals, M^a. A. (1989). *Per una didàctica de la matemàtica a l'escola. I. Parvulari*. Eumo.
- Cardet, N. (2009). Els cigrons i la matemàtica. *Guix*, 356-357. *Suplement Guixdos*, 156, 1-15.
- Carpenter, T. P., Franke, M. L., y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic y algebra in elementary school*. Heinemann.
- Carpenter, T. P., Levi, L., Franke, M. L., y Zeringue Koehler, J. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. *ZDM Mathematics Education*, 37(1), 53–59. <https://doi.org/10.1007/BF02655897>
- Carraher, D. W., Martínez, M. V., y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education*, 40, 3-22. <https://doi.org/10.1007/s11858-007-0067-7>
- Casey, K., y Sturgis, C. (2018). *Levers and Logic Models: A Framework to Guide Research and Design of High-Quality Competency-Based Education Systems*. CompetencyWorks Report. iNACOL.
- Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2017). Pensamiento funcional mostrado por estudiantes de Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 6(2), 1-13. <https://doi.org/10.24197/edmain.2.2017.1-13>
- Dienes, Z.P. (1971a). *Estados y operadores. 2: Iniciación al álgebra*. Teide
- Dienes, Z.P. (1971b). *Estados y operadores. 1: operadores aditivos*. Teide
- Dienes, Z.P. y Golding, E. (1976). *Los primeros pasos en matemáticas. 1: lógica y juegos lógicos*. Teide.
-

- Kaput, J. J. (1998). *Teaching and learning a new algebra with understanding*. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.
- Kaput, J. J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by “algebrafying” the K-12 curriculum*. National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.
- Kaput, J. J., Carraher, D.W., y Blanton, M. L. (2009). *Algebra in the Early Grades*. Taylor & Francis Group.
- Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The Mathematics Educator*, 8, 139-151.
- Ministerio de Educación (2018). *Bases Curriculares 2018: Educación Parvularia*. Unidad de Curriculum y Evaluación.
- National Council Teachers of Mathematics [NCTM]. (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. National Council of Teachers of Mathematics (traducción de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES).
- Pincheira, N., Acosta, Y., y Alsina, Á. (en revisión). Avances en la didáctica del álgebra en educación infantil: vinculando conocimientos y modos de pensamiento algebraico.
- Pincheira, N., y Alsina, Á. (2021). Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria. *Educación Matemática*, 33(1), 153-180. <https://doi.org/10.24844/EM3301.06>
- Radford, L. (2011). Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. En Ubuz, B. (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 17-24). PME.
- Ministry of Education Singapore. (2013). *Nurturing Early Learners: A Curriculum for Kindergartens in Singapore: Numeracy: Volume 6*. Ministry of Education.
- Warren, E., y Cooper, T. J. (2001). Theory and practice: Developing an algebra syllabus for Years P–7. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, y J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI study conference: the future of the teaching and learning of Algebra* (pp. 641–648). University of Melbourne.

- Warren, E., y Cooper, T. J. (2005). Introducing functional thinking in year 2: A case study of early algebra teaching. *Issues in Early Childhood*, 6(2), 150-162. <https://doi.org/10.2304/ciec.2005.6.2.5>
- Warren, E., Miller, J., y Cooper, T. J. (2013). Exploring young students' functional thinking. *PNA*, 7(2), 75-84.
- Willoughby, S. S. (1997). Functions from Kindergarten Through Sixth Grade. *Teaching Children Mathematics*, 3(6), 314-318.
- Zapatera, A. (2018). Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones. Una secuencia de tareas para Educación Infantil y Primaria. *Números, Revista de Didáctica de las matemáticas*, 97, 51-67.